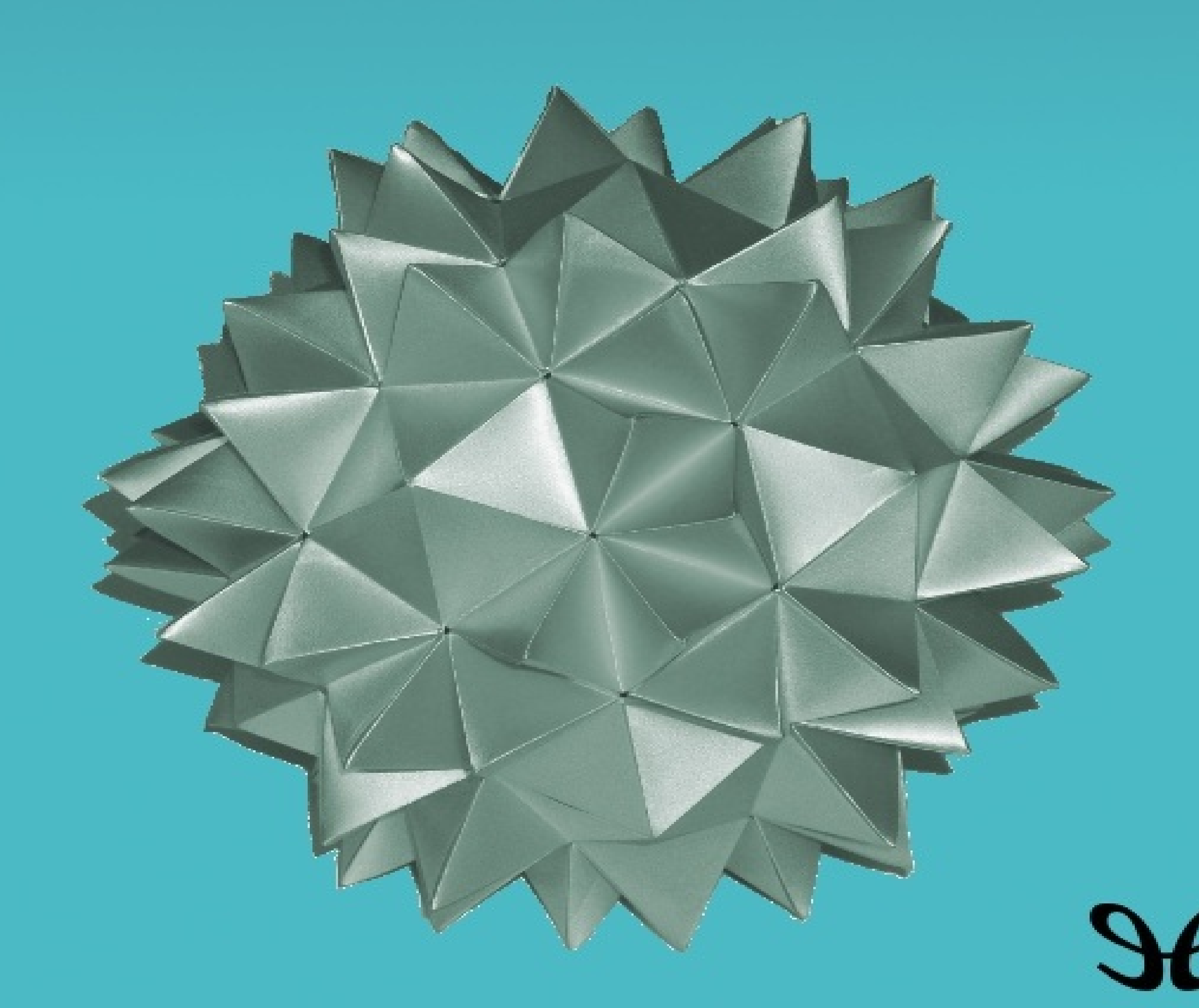
Imre Lakatos

Pruebas y refutaciones

La lógica del descubrimiento matemático



Pruebas y refutaciones es una lectura esencial para todos aquellos interesados en la metodología, la filosofía y la historia de las matemáticas. Gran parte del libro toma la forma de una conversación entre un profesor y sus estudiantes. Ellos proponen varias soluciones a problemas matemáticos e investigan las fortalezas y debilidades de tales soluciones. En sus discusiones (que discurren paralelas a ciertos desarrollos reales en la historia de las matemáticas) afloran algunos problemas filosóficos acerca de la naturaleza del descubrimiento matemático o de la creatividad. Imre Lakatos se esfuerza en desterrar la imagen clásica del desarrollo matemático como una constante acumulación de verdades establecidas. En su lugar, demuestra que la matemática crece a través del proceso, mucho más rico y dramático, de la mejora sucesiva de hipótesis creativas a través de los intentos de «probarlas» y las sucesivas críticas a dichos intentos: es la lógica de pruebas y refutaciones.



Imre Lakatos

Pruebas y refutaciones

La lógica del descubrimiento matemático

ePub r1.2
Titivillus 23.08.15

Título original: *Proofs and Refutations* - *The Logic of Mathematical Discovery*
Imre Lakatos, 1976
Traducción: Carlos Solís
Diseño de cubierta: Titivillus

Editor digital: Titivillus
ePub base r1.2



PREFACIO DE LOS EDITORES

Nuestro gran amigo y maestro Imre Lakatos falleció inesperadamente el 2 de febrero de 1974. En aquellos momentos, estaba embarcado en diversos proyectos intelectuales, como era corriente en él. De entre ellos, uno de los más importantes consistía en la publicación de una versión modificada y aumentada de su brillante ensayo «Proofs and Refutations» que apareció en cuatro partes en *The British Journal for tbe Philosophy of Science,* **14,** 1963-4. Hacía ya mucho tiempo que Lakatos había contratado dicho libro, si bien había postergado su publicación con el deseo de corregir y mejorar más aún el ensayo, añadiéndole importante material extra. La obra se retrasó considerablemente por la desviación de sus intereses hacia la filosofía de la ciencia física, si bien en el verano de 1973 decidió finalmente llevar adelante la publicación. A lo largo de ese verano, cada uno de nosotros discutimos con él los planes relativos al libro, por lo que, tras este desgraciado cambio de circunstancias, hemos intentado dar a luz un libro lo más parecido posible al que entonces proyectaba Lakatos.

Además del ensayo original, «Proofs and Refutations» (que aparece aquí como Capítulo 1), hemos incluido tres nuevas partes. En primer lugar, hemos añadido una segunda parte al texto principal, relativa a la prueba algebraico-vectorial de Poincaré de la conjetura de Descartes-Euler. Está basada en el capítulo 2 de la tesis doctoral que Lakatos presentó en Cambridge en 1961. (El ensayo «Proofs and Refutations» original constituía una versión muy corregida y mejorada del capítulo primero de dicha tesis.) Una de las partes del capítulo 3 de la tesis aparece aquí como Apéndice 1, conteniendo otro ejemplo del método de pruebas y refutaciones. Se ocupa de la demostración de Cauchy del teorema que afirma que el límite de cualquier serie

convergente de funciones continuas es él mismo continuo. Tanto el Capítulo 2 del texto principal como el Apéndice 1 habrían de calmar las dudas a menudo expresadas por los matemáticos que han leído «Proofs and Refutations», en el sentido de que, aunque el método de análisis de la prueba descrito por Lakatos pueda aplicarse al estudio de los poliedros, un tema «cuasiempírico» en el que los contraejemplos son fácilmente visualizables, con todo podría resultar inaplicable a las matemáticas «reales». El tercer añadido (el apéndice 2) también está basado en una de las partes del capítulo 3 de la tesis de Lakatos, y versa acerca de las consecuencias de su posición para el desarrollo, presentación y enseñanza de las matemáticas.

Una de las razones por las que Lakatos retrasó la publicación fue el reconocimiento de que, aunque parte del material extra contenía muchas nuevas cuestiones y desarrollos de su posición, con todo precisaba mayor consideración e investigación histórica, cosa que resulta especialmente cierta del material (del apéndice 1) sobre Cauchy y Fourier. También nosotros somos conscientes de ciertas dificultades y ambigüedades en este material, así como de algunas omisiones. Con todo, consideramos que no debiéramos cambiar el contenido de lo escrito por Lakatos, sin que estemos en condiciones de suministrar la investigación histórica, necesariamente larga y detallada, precisa para elaborar y completar ese material. Así, pues, ante la alternativa de no publicar en absoluto dicho material o publicarlo en estado inacabado, hemos optado por esto último. Consideramos que hay en él muchas cosas de interés y esperamos que sirva de estímulo para que otros estudiosos lo amplíen y corrijan si es necesario.

En general, no hemos tenido a bien modificar el contenido del material de Lakatos, incluso por lo que respecta a aquellas de sus partes que expresan posiciones que estamos seguros que Lakatos habría modificado. Por tanto, nos hemos limitado a señalar (en notas señaladas mediante un asterisco) algunas de aquellas cosas sobre las que hubiéramos llamado la atención de Lakatos, tratando de persuadirle para que las cambiara, en la creencia de que, en la práctica, Lakatos hubiera accedido a esos cambios al publicar ahora el material. (Como es natural, su posición intelectual había cambiado considerablemente a lo largo de los trece años que median entre la terminación de su tesis doctoral y su muerte. Los cambios más importantes en

su filosofía general quedan explicados en su [1970]. Habría que mencionar el hecho de que Lakatos consideraba que su metodología de los programas de investigación científica tenían importantes implicaciones para su filosofía de las matemáticas.)

Nuestra política en cuestiones de presentación ha sido la de dejar casi totalmente intacto el material que el propio Lakatos había publicado (es decir, el capítulo primero del texto principal). La única excepción es una serie de erratas de imprenta y otros deslices obvios sin importancia. Sin embargo, hemos modificado de un modo más bien substancial el material publicado aquí por vez primera, si bien, repetimos, sólo por lo que respecta a la forma y no al contenido. Puesto que se trata de un modo de proceder más bien inusual, quizá convenga decir un par de cosas a modo de justificación.

Lakatos siempre procedía con sumo cuidado en la presentación de cualquiera de sus materiales que fuese a ser publicado y, antes de publicarlo, hacía siempre que circulase ampliamente entre sus colegas y amigos en busca de críticas y sugestiones acerca de cómo mejorarlo. No nos cabe duda de que el material que aquí se publica por primera vez habría recibido semejante tratamiento, sufriendo cambios mucho más drásticos de los que hemos osado introducir nosotros. El conocimiento que poseemos, a través de la experiencia personal, de las molestias que se tomaba Lakatos para presentar sus posiciones lo más claramente posible nos ha obligado a intentar mejorar la presentación de este material del modo más eficaz posible. Es evidente que estos nuevos añadidos no están lo bien que estarían si el propio Lakatos hubiese revisado el material en que se basan. Con todo, nos consideramos lo suficientemente próximos a Lakatos y lo bastante implicados en algunas de su publicaciones anteriores como para llevar adelante el intento razonable de elaborar el material, aproximándolo un tanto a su elevado nivel de exigencias.

Es para nosotros un placer haber tenido oportunidad de realizar esta edición de algunos trabajos importantes de Lakatos en filosofía de las matemáticas, puesto que ello nos permite descargarnos de una parte de la deuda personal e intelectual que tenemos contraída con él.

John Worrall
Elie Zahar

AGRADECIMIENTOS

El material sobre el que se basa este libro ha tenido una historia larga y diversa, como ya se ha indicado en parte en nuestro prefacio. Según los agradecimientos que Lakatos adjuntó a su ensayo original de 1963-4 (reimpreso aquí como capítulo 1), dicho trabajo comenzó su vida en 1958-9 en King's College, Cambridge, y se leyó por vez primera en el seminario de Karl Popper, en la London School of Economics, el mes de marzo de 1959. Otra versión quedó incorporada a su tesis doctoral de Cambridge de 1961, en la que se basa también el resto de este libro. La tesis se preparó bajo la supervisión del Profesor R. B. Braithwaite. En relación con ella, Lakatos agradecía la ayuda financiera de la Fundación Rockefeller, añadiendo que había «recibido una gran ayuda, ánimos y valiosas críticas del Dr. T. J. Smiley». El resto de los agradecimientos de Lakatos rezan como sigue:

> Cuando preparaba esta última versión en la London School of Economics el autor trató de tomar en cuenta especialmente las críticas y sugerencias del Dr. J. Agassi, del Dr. I. Hacking, de los Profesores W. C. Kneale y R. Montague, de A. Musgrave, del Profesor M. Polanyi y J. W. N. Watkins. El tratamiento del método de exclusión de monstruos se mejoró bajo el estímulo de las consideraciones críticas de los Profesores Pólya y B. L. Van der Waerden. La distinción entre los métodos de exclusión y ajuste de monstruos fue sugerida por B. MacLennan.
>
> El escrito ha de considerarse contra el trasfondo del resurgimiento de la heurística matemática debido a Pólya y de la filosofía crítica de Popper.

Al preparar este libro, los editores recibieron la ayuda de John Bell, Mike Hallett, Moshé Machover y Jerry Ravetz, todos los cuales leyeron amablemente diversas redacciones del capítulo 2 y de los apéndices, formulando útiles críticas.

Quisiéramos también agradecer el trabajo de Sandra D. Mitchell y especialmente el de Gregory Currie, quien criticó minuciosamente nuestra reelaboración del material de Lakatos.

J. W.
E. Z.

INTRODUCCIÓN DEL AUTOR

En la historia del pensamiento, ocurre con frecuencia que, cuando surge un nuevo método, el estudio de aquellos problemas que pueden tratarse con su ayuda avanza rápidamente, atrayendo sobre sí la atención, mientras que el resto tiende a ser ignorado e incluso olvidado, despreciándose su estudio.

En nuestro siglo, esta situación parece haber surgido en la Filosofía de las Matemáticas, como resultado del desarrollo dinámico de la metamatemática.

El contenido de la metamatemática es una abstracción de las matemáticas en la que las teorías matemáticas son sustituidas por sistemas formales, pruebas mediante ciertas secuencias de fórmulas bien-formadas y definiciones mediante «expedientes abreviatorios» que resultan «teóricamente eliminables», aunque «tipográficamente convenientes»[1]. Fue Hilbert quien ideó esta abstracción, a fin de disponer de una técnica poderosa para abordar algunos de los problemas de la metodología de las matemáticas. Al mismo tiempo, hay problemas que caen fuera del alcance de las abstracciones matemáticas. Entre ellos, se hallan los problemas relativos a las matemáticas informales *(inhaltliche)* y a su desarrollo así como todos los problemas relativos a la lógica de la situación de la resolución de problemas en matemáticas.

Con la expresión «escuela formalista» aludiré a aquella escuela de filosofía matemática que tiende a identificar las matemáticas con su abstracción axiomática formal (y la filosofía de las matemáticas con la metamatemática). Una de las enunciaciones más claras de la posición formalista se puede hallar en Carnap [1937]. Carnap requiere que (*a*) «la filosofía se substituya por la lógica de la ciencia…», (*b*) «la lógica de la ciencia no es más que la sintaxis lógica del lenguaje de la ciencia…», (*c*) «la

metamatemática es la sintaxis del lenguaje matemático» (págs. xiii y 9). O bien: la filosofía de las matemáticas ha de ser sustituida por la metamatemática.

El formalismo desconecta la filosofía de las matemáticas de la historia de las matemáticas, puesto que, de acuerdo con la concepción formalista de las matemáticas, éstas no tienen propiamente historia. Cualquier formalista estaría básicamente de acuerdo con aquella consideración de Russell, expresada «románticamente», aunque dicha con toda seriedad, según la cual las *Laws of Thought* [1854] de Boole constituyeron «el primer libro jamás escrito sobre matemáticas»[2]. El formalismo niega la condición de matemáticas a la mayoría de las cosas que normalmente se han considerado tales y no puede decir nada acerca de su desarrollo. Ninguno de los períodos «creativos» de las teorías matemáticas, y difícilmente alguno de los «críticos», habrían de ser admitidos en los cielos formalistas, donde las teorías matemáticas moran como los serafines, purgadas de todas las impurezas de la incertidumbre terrestre. Con todo, es frecuente que los formalistas dejen abierta una puertecilla trasera para los ángeles caídos: si resulta que, en el caso de algunas «mezclas de matemáticas con alguna otra cosa», podemos hallar sistemas formales «que las incluyan en cierto sentido», entonces también ellas pueden ser admitidas (Curry [1951], págs. 56-7). Según esto, Newton habría de esperar siglos y siglos hasta que Peano, Russell y Quine le introdujesen en el cielo al formalizar el Cálculo. Dirac es más afortunado, ya que Schwartz salvó su alma mientras estaba aún vivo. Tal vez debamos aludir aquí a la paradójica condición del metamatemático: de acuerdo con las normas formalistas o aun deductivistas, no resulta ser un matemático honesto. Dieudonné habla de la «absoluta necesidad impuesta sobre todo matemático *que se preocupe por la integridad intelectual*» (el subrayado, es mío) consistente en presentar sus razonamientos en forma axiomática ([1939], pág. 225).

Bajo el actual dominio del formalismo, uno se ve tentado a parafrasear a Kant: la historia de las matemáticas que carezca de la guía de la filosofía se ha vuelto *ciega*, mientras que la filosofía de las matemáticas que vuelva la espalda a los más intrigantes fenómenos de la historia de las matemáticas, se ha hecho *vacía*.

El «formalismo» es un baluarte de la filosofía del positivismo lógico. De acuerdo con éste, un enunciado es significativo sólo si es o bien «tautológico», o bien empírico. Puesto que la matemática informal no es ni «tautológica» ni empírica, habrá de ser asignificativa, un simple sinsentido[3]. Los dogmas del positivismo lógico han resultado perjudiciales para la *historia y la filosofía de las matemáticas.*

Estos ensayos tienen por fin abordar algunos problemas de la *metodología de las matemáticas.* Uso la palabra «metodología» en un sentido próximo a la «heurística»[4] de Pólya y Bernays, así como a la «lógica del descubrimiento» o a la «lógica de la situación»[5] de Popper. La reciente expropiación del término «metodología de las matemáticas» para utilizarlo como sinónimo de «metamatemática» posee sin duda un cariz formalista, que indica que, en la filosofía formalista de las matemáticas, no hay lugar para la metodología en cuanto lógica del descubrimiento[6]. Según los formalistas, las matemáticas se identifican con las matemáticas formalizadas. Mas, ¿qué podemos *descubrir* en una teoría formalizada? Dos tipos de cosas. *Primero,* podemos descubrir la solución a problemas que una máquina de Turing convenientemente programada resolvería en un tiempo finito (como, por ejemplo: una pretendida prueba, ¿es o no una prueba?) Ningún matemático tiene ningún interés en seguir el tedioso «método» mecánico prescrito por semejantes procedimientos de decisión. *Segundo,* podemos descubrir la solución de problemas (del tipo: ¿es o no un teorema determinada fórmula de una teoría no-decidible?), en los que nos podemos dejar guiar tan sólo por el «método» de «intuición indisciplinada y buena suerte».

Ahora bien, esta fría alternativa entre el racionalismo de una máquina y el irracionalismo de la ciega adivinanza no vale para las matemáticas vivas[7]: una investigación en torno a las matemáticas *informales* suministrará una rica lógica situacional para los matemáticos operantes, una lógica de la situación que ni es mecánica ni irracional, y que no puede ser reconocida ni menos aún estimulada por la filosofía formalista.

La historia de las matemáticas y la lógica del descubrimiento matemático, es decir, la filogénesis y la ontogénesis del pensamiento matemático[8], no se puede desarrollar sin la crítica y rechazo final del formalismo.

Sin embargo, la filosofía formalista de las matemáticas posee raíces muy

profundas. Se trata del último eslabón de la larga cadena de filosofías *dogmáticas* de las matemáticas. Durante más de dos mil años, ha tenido lugar una larga discusión entre *dogmáticos* y *escépticos.* Los dogmáticos sostienen que podemos alcanzar la verdad y saber que la hemos alcanzado, sirviéndonos para ello del poder de nuestro intelecto y/o sentidos humanos. Los escépticos, por otra parte, o bien sostienen que no podemos alcanzar la verdad en absoluto (si no es con ayuda de la experiencia mística), o bien que no podemos saber si la hemos alcanzado o si podemos alcanzarla. En este gran debate, en el que los argumentos se ponen una y otra vez al día, las matemáticas han constituido la orgullosa fortaleza del dogmatismo. Siempre que el dogmatismo matemático de la época entraba en «crisis», una nueva versión suministraba de nuevo genuino rigor y fundamentos últimos, restaurando con ello la imagen autoritaria, infalible e irrefutable de las matemáticas, «la única Ciencia que Dios ha tenido a bien otorgar hasta ahora a la humanidad» (Hobbes [1651], pág. 15). La mayoría de los escépticos se rindieron ante el carácter inexpugnable de este reducto de epistemología dogmática[9]. Ya es hora de lanzarle un reto.

El meollo de este caso estudiado pondrá en entredicho el formalismo matemático, si bien no afectará directamente a las posiciones últimas del dogmatismo matemático. Su modesto objetivo consiste en elaborar la idea de que las matemáticas informales y cuasi-empíricas no se desarrollan mediante un monótono aumento del número de teoremas indubitablemente establecidos, sino que lo hacen mediante la incesante mejora de las conjeturas, gracias a la especulación y a la crítica, siguiendo la lógica de pruebas y refutaciones. No obstante, puesto que la metamatemática es un paradigma de matemática informal y cuasi-empírica, que está ahora en una etapa de crecimiento rápido, este ensayo pondrá también en tela de juicio por implicación el moderno dogmatismo matemático. El estudioso de la historia reciente de la metamatemática reconocerá en su propio campo los patrones aquí descritos.

La forma dialogada debería reflejar la dialéctica de la narración; está pensada así para que contenga una especie de *historia racionalmente reconstruida o «destilada». La historia real resonará en las notas, la mayoría de las cuales han de ser tenidas, por tanto, como parte orgánica del*

ensayo.

I

1. Un Problema y una Conjetura

El diálogo tiene lugar en un aula imaginaria. La clase se interesa por un PROBLEMA: ¿existe una relación entre el número de vértices, *V*, el número de aristas, *A*, y el número de caras, *C*, de los poliedros, especialmente de los *poliedros regulares*, análoga a la relación trivial que hay entre el número de vértices y aristas de los *polígonos*, a saber, que hay tantos vértices como aristas: $V = A$? Esta última relación nos permite clasificar los *polígonos* de acuerdo con el número de aristas (o vértices): triángulos, cuadriláteros, pentágonos, etc. Una relación similar permitiría clasificar los *poliedros*.

Tras muchos ensayos y errores, constatan que para todos los poliedros regulares $V - A + C = 2$[10]. Alguien *aventura* que eso se puede aplicar a cualquier poliedro. Otros intentan falsar esta *conjetura*, tratan de contrastarla de muchos modos distintos, pero se mantiene en pie. Los resultados *corroboran* la conjetura, sugiriendo que se podría *probar*. En este punto, tras los estadios de *problema* y *conjetura*, entramos en el aula[11]. El maestro está a punto de ofrecer una *prueba*.

2. Una Prueba

MAESTRO: En nuestra última lección hemos llegado a una conjetura relativa a los poliedros; a saber, que para todo poliedro $V - A + C = 2$, donde *V* es el número de vértices, *A* el número de aristas y *C* el número de caras. La hemos contrastado de diversas maneras, pero aún no la hemos probado. ¿Ha hallado alguien una prueba?

ALUMNO SIGMA: «Por lo que a mí respecta, he de admitir que aún no he sido capaz de idear una prueba estricta del teorema… Sin embargo, puesto que su verdad se ha establecido en tantos casos, no puede haber duda de que vale para cualquier sólido. Así, la proposición parece estar satisfactoriamente demostrada»[12]. Pero si usted tiene una prueba, preséntela, por favor.

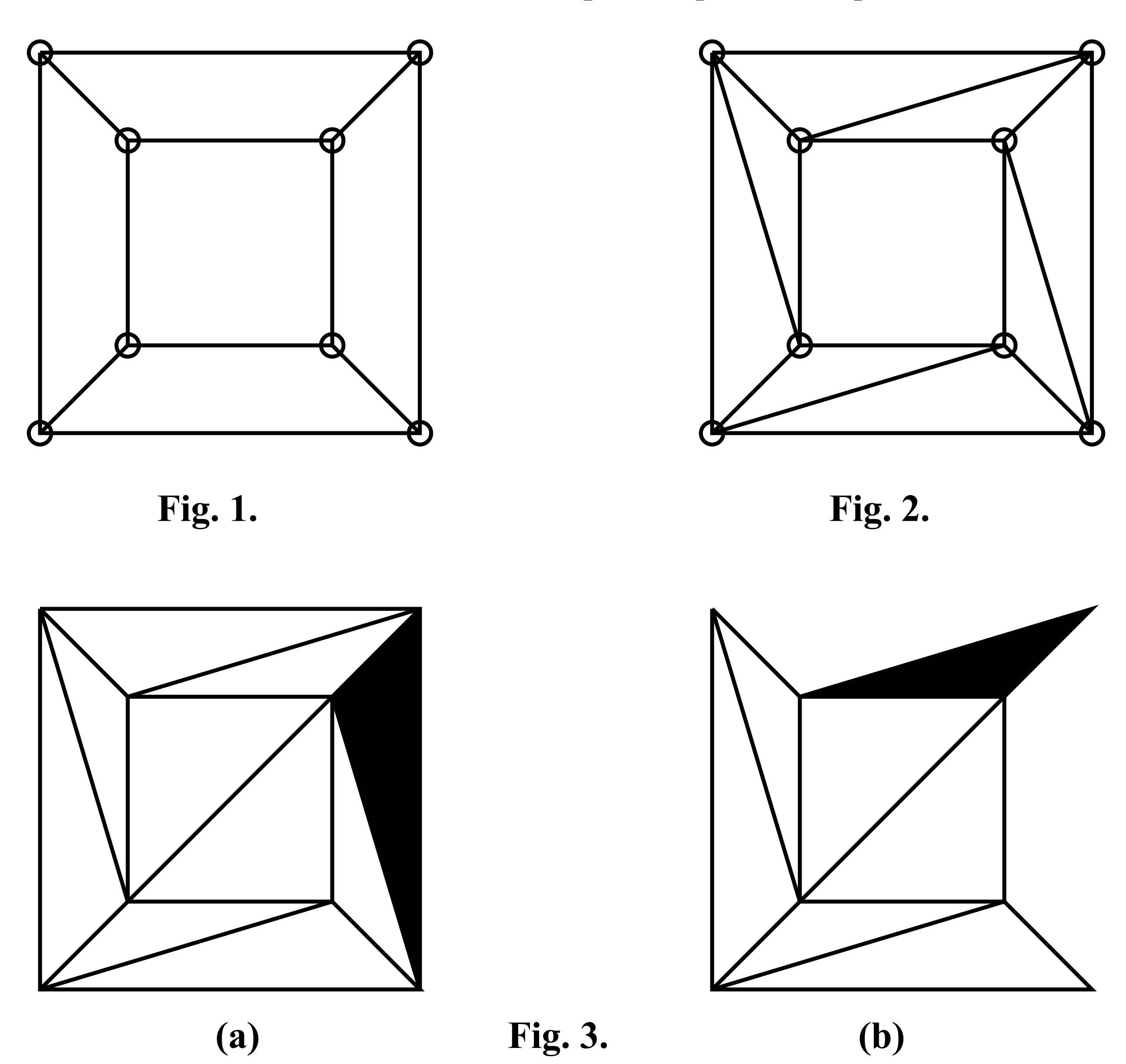


Fig. 1. **Fig. 2.**

(a) **Fig. 3.** **(b)**

MAESTRO: En realidad, tengo una que consta del siguiente experimento mental. *Paso 1:* imaginemos que el poliedro está hueco, con una superficie hecha de goma fina. Si recortamos una de las caras, podemos estirar la superficie restante, poniéndola plana sobre el encerado sin romperla. Las

caras y aristas se deformarán, las aristas pueden hacerse curvas, pero *V* y *A* no se alterarán, de modo que si $V - A + C = 2$ en el poliedro original, en esta red plana tendremos que $V - A + C = 1$ (recuérdese que hemos eliminado una cara). (La Fig. 1 muestra la red plana en el caso de un cubo.) *Paso 2:* Triangulemos ahora nuestro mapa, pues en realidad se asemeja a un mapa geográfico. Trazamos diagonales (tal vez curvilíneas) en esos polígonos (quizá curvilíneos) que no son ya triángulos (posiblemente curvilíneos). Al dibujar cada una de las diagonales, aumentamos tanto *A* como *C* en uno, de modo que el total de $V - A + C$ no variará (fig. 2). *Paso 3:* Eliminamos ahora los triángulos, uno a uno, de la red triangulada. Para eliminar un triángulo o eliminamos una arista, con lo que desaparece una cara y una arista (fig. 3(*a*)), o eliminamos dos aristas y un vértice, con lo que desaparece una cara, dos aristas y un vértice (fig. 3(*b*)). Así pues, si antes de la eliminación de un triángulo teníamos que $V - A + C = 1$, después de eliminarlo seguirá siendo así. Al final de este proceso obtenemos un solo triángulo, en cuyo caso $V - A + C = 1$ es verdad. Por tanto, hemos probado nuestra conjetura[13].

ALUMNO DELTA: En ese caso, debería usted llamarla *teorema*, puesto que ya no hay en ella nada conjetural[14].

ALUMNO ALFA: Me extraña. Veo que este experimento puede realizarse con un cubo o un tetraedro, mas ¿cómo voy a saber que también se puede realizar con *cualquier* poliedro? Por ejemplo, ¿está usted seguro, Señor, de que *cualquier poliedro se puede estirar poniéndolo plano sobre el encerado, tras haberle quitado una cara*? Tengo mis dudas acerca de su primer paso.

ALUMNO BETA: ¿Está usted seguro de que *al triangular el mapa se obtendrá siempre una nueva cara por cada nueva arista*? Tengo mis dudas sobre su segundo paso.

ALUMNO GAMMA: ¿Está usted seguro de que *sólo hay dos altertuitivas (la desaparición de una arista o de dos aristas y un vértice) al eliminar los triángulos uno a uno*? ¿Está usted seguro incluso de que *nos quedamos con un solo triángulo al final del proceso*? Tengo mis dudas sobre su tercer paso[15].

MAESTRO: Por supuesto que no estoy seguro.

ALFA: ¡En ese caso estamos peor que al principio! ¡En lugar de una

conjetura tenemos ahora tres como mínimo! ¿A eso llama usted una «prueba»?

MAESTRO: Admito que pueda ser un tanto confundente aplicar a este experimento mental el nombre tradicional de «prueba», pues no considero que establezca la verdad de la conjetura.

DELTA: ¿Qué es lo que hace entonces? ¿Qué cree usted que prueba una prueba matemática?

MAESTRO: He ahí una sutil pregunta que trataremos de responder más tarde. Mientras tanto, propongo que mantengamos el venerable término técnico «prueba» para aplicarlo a *un experimento mental (o «cuasi-experimento») que sugiera una descomposición de la conjetura original en subconjeturas o lemas, incorporándola* así a un cuerpo de conocimiento tal vez muy lejano. Nuestra «prueba», por ejemplo, ha incorporado la conjetura original (relativa a cristales o, digamos, sólidos) a la teoría de las hojas de goma. Descartes o Euler, los padres de la conjetura original, ni siquiera soñaron esto, con toda certeza[16].

3. Crítica de la Prueba mediante Contraejemplos locales pero no globales

MAESTRO: Esta descomposición de la conjetura, sugerida por la prueba, abre nuevas perspectivas para la contrastación. La descomposición despliega la conjetura en un frente más amplio, de modo que nuestra crítica disponga de más blancos. ¡Ahora tenemos al menos tres oportunidades en lugar de una de aplicar contraejemplos!

GAMMA: Ya he expresado el desagrado que me produce su tercer lema (a saber, que sólo tenemos dos posibilidades al ir eliminando los triángulos de la red que resulta del estirado y subsiguiente triangulación: o bien quitamos una arista, o quitamos dos aristas y un vértice). Sospecho que puedan aparecer otros parrones al eliminar un triángulo.

MAESTRO: Una sospecha no es muy crítica.

GAMMA: ¿Entonces, es un *contraejemplo* una crítica?

MAESTRO: Ciertamente. Las conjeturas ignoran desagrados y sospechas

pero no pueden ignorar los contraejemplos.

ZETA [*aparte*]: Obviamente, las conjeturas son muy distintas de quienes las representan.

GAMMA: Propongo un contraejemplo trivial. Tomemos la red triangular resultante de realizar las dos primeras operaciones en un cubo (fig. 2). Si quito ahora un triángulo del *interior* de la red, como quien quita una pieza de un rompecabezas, lo quito sin retirar ni un sólo vértice o arista. Así, el tercer lema es falso; y no sólo en el caso de un cubo, sino también en el de *cualquier* poliedro, excepción hecha del tetraedro, en cuya red plana todos los triángulos son triángulos en la frontera. Así su prueba demuestra el teorema de Euler para el tetraedro; pero ya sabíamos que en el caso del tetraedro $V - A + C = 2$, ¿por qué probarlo, entonces?

MAESTRO: Está usted en lo cierto. Pero dese cuenta de que el cubo, contraejemplo del tercer lema, no es a la vez un contraejemplo de la conjetura principal, puesto que en el cubo $V - A + C = 2$. Ha mostrado usted la pobreza del argumento, de la prueba, pero no la falsedad de nuestra conjetura.

ALFA: ¿Entonces, desechará usted su prueba?

MAESTRO: No; la crítica no es necesariamente destrucción. Mejoraré mi prueba para que se sostenga frente a la crítica.

GAMMA: ¿Cómo?

MAESTRO: Antes de mostrar de qué modo, permítanme introducir la siguiente terminología. Llamaré *«contraejemplo local»* al ejemplo que refute un lema (sin refutar necesariamente la conjetura principal), y llamaré *«contraejemplo global»* al que refute la propia conjetura principal. Así pues, su contraejemplo es local y no global. Un contraejemplo que sea local pero no global critica la prueba y no la conjetura.

GAMMA: Así pues, la conjetura puede ser verdadera, pero su prueba no la demuestra.

MAESTRO: Pero puedo elaborar y *mejorar* fácilmente *la prueba,* sustituyendo el lema falso por otro ligeramente modificado que no refute su contraejemplo. Ya no pretendo que *la eliminación de cualquier triángulo siga uno de los dos patrones mencionados,* sino tan sólo que, *en cada estadio de la operación eliminadora, la eliminación de un triángulo de la frontera*

sigue uno de esos patrones. Volviendo sobre mi experimento mental, lo único que tengo que hacer es insertar una simple palabra en mi tercera etapa; a saber, que «de la red triangulada, eliminamos ahora los triángulos *fronterizos* uno a uno». Estará usted de acuerdo en que sólo era necesaria una observación banal para poner bien la prueba[17].

GAMMA: No considero que su observación haya sido tan banal; de hecho, resultó bastante ingeniosa. Para poner en claro esto, mostraré que es falsa. Tomemos de nuevo la red plana del cubo y eliminemos ocho de los diez triángulos, en el orden dado en la fig. 4. Al eliminar el octavo triángulo, que a estas alturas es ya un triángulo de la frontera, eliminamos dos aristas y ningún vértice, lo que hace cambiar $V - A + C$ en 1, y nos quedamos con los dos triángulos desconexos 9 y 10.

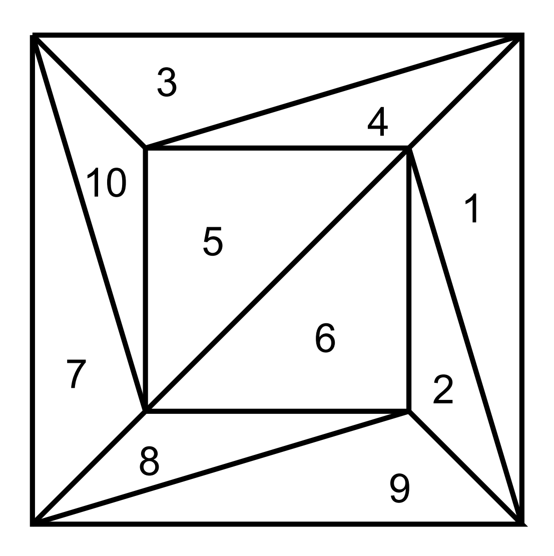


Fig. 4.

MAESTRO: Bueno, podría salvar la cara diciendo que por un triángulo fronterizo entendía uno cuya eliminación no desconectase la red. Sin embargo, la honestidad intelectual me impide hacer cambios subrepticios en mi posición mediante enunciados que empiecen con «yo quería decir…» Por tanto, admito que tengo que *sustituir* ahora la segunda versión de la operación de eliminación de triángulos por una tercera, versión: eliminemos los triángulos de modo que no se altere $V - A + C$.

KAPA: Concedo generosamente que el lema correspondiente a esta

operación es verdadero; a saber, que si eliminamos los triángulos uno a uno de manera que $V - A + C$ no se altere, entonces $V - A + C$ no se altera.

MAESTRO: No. El lema dice que *los triángulos de nuestra red se pueden numerar de tal modo que, al eliminarlos en el orden correcto, $V - A + C$ no variará hasta llegar al último triángulo.*

KAPA: Pero, ¿cómo se habrá de construir este orden correcto, si es que existe después de todo?[18] Su experimento mental primitivo suministraba la instrucción: elimínense los triángulos en un orden cualquiera. Su experimento mental modificado daba la instrucción: elimínense los triángulos de la frontera en cualquier orden. Ahora dice usted que debiéramos seguir un orden definido, pero no nos dice de qué orden se trata ni si existe, después de todo. Así pues, el experimento mental se desmorona. Usted mejoró el análisis de la prueba, es decir, la lista de lemas; pero ha desaparecido el experimento mental que usted denominaba «la prueba».

RO: Sólo ha desaparecido el tercer paso.

KAPA: Además, ¿acaso *mejoró* usted el lema? Sus dos primeras versiones simples al menos parecían trivialmente verdaderas antes de ser refutadas; su extensa versión parcheada ni siquiera ofrece un aspecto plausible. ¿Puede usted creer realmente que escapará a la refutación?

MAESTRO: Muchas proposiciones-«plausibles» o incluso «trivialmente verdaderas» usualmente resultan pronto refutadas; las conjeturas sofisticadas e implausibles, maduradas en la crítica, podrían dar en el blanco de la verdad.

OMEGA: ¿Y qué ocurre si incluso sus «conjeturas sofisticadas» resultan falsadas y ahora ya no puede usted sustituirlas por otras sin falsar? ¿O si *no* consigue mejorar aún más el argumento mediante parches locales? Ha conseguido usted superar un contraejemplo local, que no global, sustituyendo el lema refutado, pero ¿qué pasa si no tiene usted éxito la próxima vez?

MAESTRO: Buena pregunta; tomaremos nota de ella para mañana.

4. Crítica de la Conjetura mediante Contraejemplos Globales

ALFA: Tengo un contraejemplo que falsa su lema primero, aunque también resulta ser un contraejemplo de la conjetura principal; es decir, es así

mismo un contraejemplo global.

MAESTRO: ¿De veras? Veámoslo.

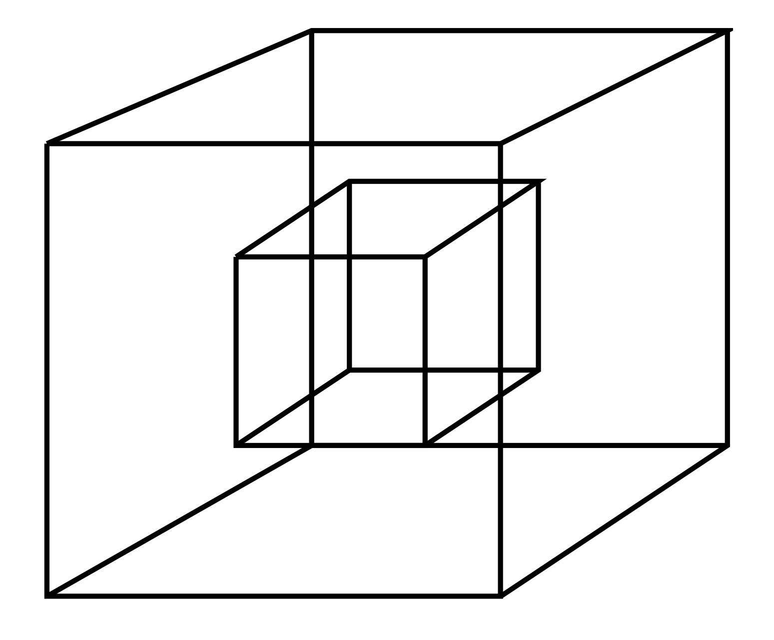


Fig. 5.

ALFA: Imaginemos un sólido limitado por un par de cubos encajado uno dentro del otro; un par de cubos, uno de los cuales está dentro, aunque sin tocar al otro (fig. 5). Este cubo hueco falsa su lema primero, ya que al eliminar una cara del cubo interno, el poliedro no será estirable en un plano, si bien la situación no mejora al eliminar una de las caras del cubo externo. Además, para cada cubo tenemos que $V - A + C = 2$, de modo que para el cubo hueco $V - A + C = 4$.

MAESTRO: Buena exhibición. Llamémoslo *Contraejemplo 1*[19]. ¿Y ahora qué?

(a) Rechazo de la conjetura. El método de la rendición

GAMMA: Señor, su tranquilidad me sorprende. Un solo contraejemplo refuta una conjetura con la misma efectividad que diez de ellos. La conjetura y su prueba han errado completamente el tiro, así que ¡manos arriba! Tiene usted que rendirse. Tache la conjetura falsa, olvídese de ella e intente enfocar

la cuestión de manera radicalmente nueva.

MAESTRO: Coincido con usted en que la *conjetura* ha recibido una severa crítica mediante el contraejemplo de Alfa, pero no es cierto que la *prueba* haya «errado completamente el tiro». Si, por el momento, está usted de acuerdo con mi anterior propuesta de usar la palabra «prueba» para referirnos a un «experimento mental que conduce a la descomposición de la conjetura original en subconjeturas», en vez de usarla en el sentido de una «garantía de determinada verdad», no hay por qué sacar esa conclusión. Mi prueba demostró ciertamente la conjetura de Euler en el primer sentido, aunque no necesariamente en el segundo. Usted está tan sólo interesado en pruebas que «demuestren» aquello que se han propuesto probar. Yo, por mi parte, estoy interesado en las pruebas aun cuando no cumplan su pretendido fin. Colón no descubrió la India, pero descubrió algo bastante interesante.

ALFA: Así, según su filosofía, mientras que un contraejemplo local (si no es al mismo tiempo global) constituye una crítica de la prueba, aunque no de la conjetura, un contraejemplo global constituye una crítica de la conjetura, aunque no necesariamente de la prueba. Accede usted a rendirse por lo que respecta a la conjetura, pero defiende la prueba. Mas, si la conjetura es falsa, ¿qué diablos demuestra la prueba?

GAMMA: Su analogía con el caso de Colon se viene abajo. La aceptación de un contraejemplo global ha de significar la rendición total.

(b) Rechazo del contraejemplo. El método de exclusión de monstruos

DELTA: ¿Pero, por qué aceptar el contraejemplo? Hemos probado nuestra conjetura y ahora ya es un teorema. Admito que choque con el llamado «contraejemplo». Uno de ellos sobra. Pero, ¿porqué ha de ceder el teorema, cuando ha sido probado? Es la «crítica» la que debe retirarse. Se trata de una falsa crítica. Ese par de cubos encajados uno en otro no constituye en absoluto un poliedro. Se trata de un *monstruo*, un caso patológico y no un contraejemplo.

GAMMA: ¿Por qué no? *Un poliedro es un sólido cuya superficie consta de caras poligonales*, y mi contraejemplo es un sólido limitado por caras poligonales.

MAESTRO: Llamemos a esta definición *Def. 1*[20].

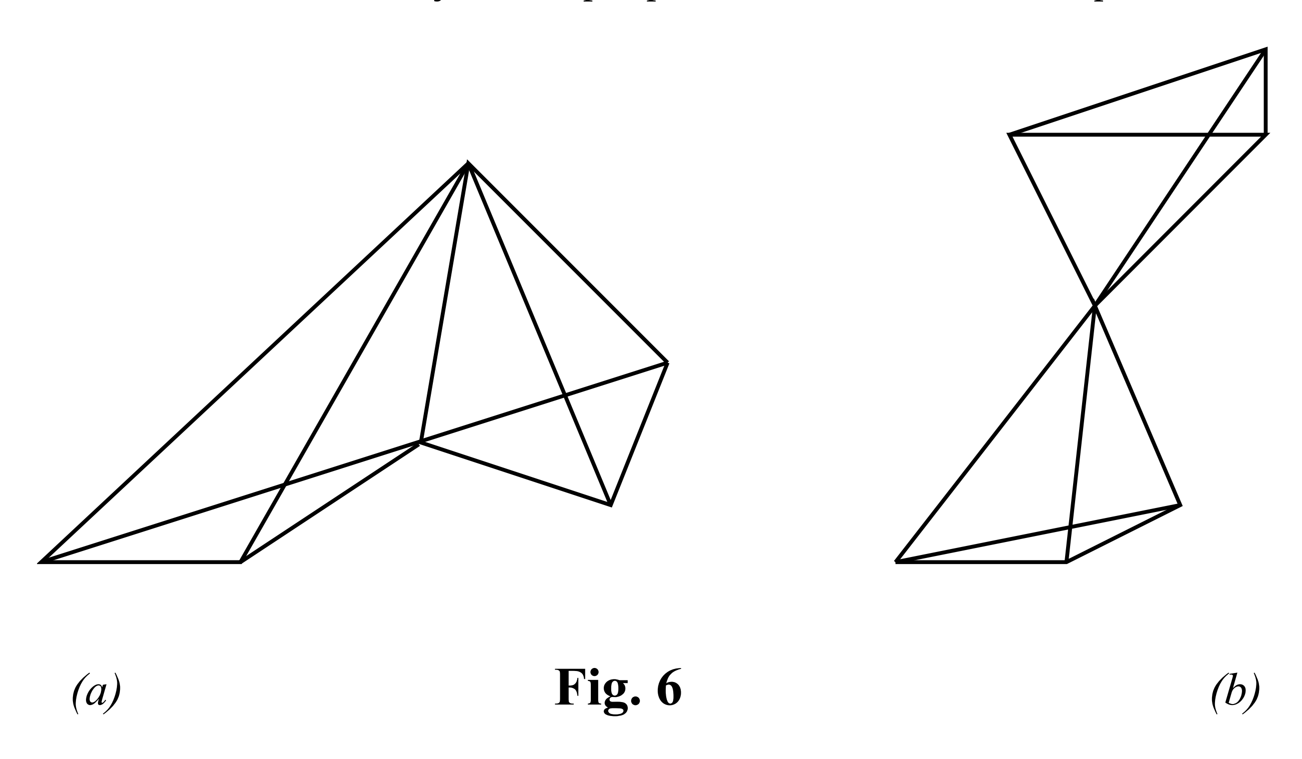
DELTA: Su definición es incorrecta. Un poliedro debe ser una *superficie:* posee caras, vértices, aristas, se puede deformar, estirar sobre un encerado y nada tiene que ver con la idea de «sólido». *Un poliedro es una superficie que consta de un sistema de polígonos.*

MAESTRO: Llamémosla *Def. 2*[21].

DELTA: Así, realmente lo que se nos mostró fueron *dos* poliedros, *dos* superficies, una completamente dentro de la otra. Una mujer con un niño en su vientre no constituye un contraejemplo de la tesis de que los seres humanos poseen sólo una cabeza.

ALFA: Así que mi contraejemplo ha engendrado un nuevo concepto de poliedro; ¿o, acaso osa usted afirmar que por poliedro *siempre* entendía usted una superficie?

MAESTRO: Por el momento, aceptamos la *Def. 2* de Delta. ¿Puede usted refutar ahora nuestra conjetura, si por poliedro entendemos una superficie?



(a) **Fig. 6** *(b)*

ALFA: Ciertamente. Tomemos dos tetraedros con un ángulo común (fig. 6(*b*)), o bien tomemos dos tetraedros con una arista común (fig. 6(*a*)). Ambos gemelos están conectados; ambos constituyen una sola superficie, pudiéndose

comprobar que en ambos casos *V* - *A* + *C* = 3.

MAESTRO: *Contraejemplos 2a y 2b*[22]

DELTA: Admiro su perversa imaginación, pero, como es natural, no quise decir que *cualquier* sistema de polígonos fuese un poliedro. Por poliedro entendía *un sistema de polígonos dispuestos de modo que (1) en cada arista se encontrasen exactamente dos polígonos y (2) fuese posible ir del interior de un polígono al interior de otro siguiendo un camino que no cruce nunca una arista por un vértice*. Sus primeros gemelos quedarían excluidos por el primer criterio de mi definición y los segundos, por el segundo.

MAESTRO: *Def. 3*[23].

ALFA: Admiro su perverso ingenio para inventar definición tras definición a modo de barricadas contra la falsación de sus ideas predilectas. ¿Por qué no define ya un poliedro como un sistema de polígonos para el que se cumple la ecuación *V* - *A* + *C* = 2? Esta Definición Perfecta…

KAPA: *Def. P*[24].

ALFA:… zanjaría para siempre la disputa. No haría falta investigar ya más sobre este tema.

DELTA: Pero no hay en el mundo un solo teorema que no pueda ser falsado mediante monstruos.

MAESTRO: Lamento interrumpirles. Como hemos visto, la refutación mediante contraejemplos depende del significado de los términos en cuestión. Si un contraejemplo ha de constituir una crítica objetiva, hemos de ponernos de acuerdo acerca del significado de nuestros términos. *Podemos* alcanzar semejante acuerdo definiendo el término allí donde la comunicación se ha interrumpido. Por mi parte, yo no he definido «poliedro», sino que suponía una *familiaridad* con el concepto; es decir, la capacidad de distinguir lo que es un poliedro de lo que no lo es: lo que algunos lógicos denominan conocer la extensión del concepto de poliedro. Y ha resultado que la extensión del concepto no era en absoluto obvia: *cuando emergen contraejemplos, es frecuente que se propongan definiciones y que se discuta sobre ellas.* Sugiero que consideremos ahora todas juntas las definiciones rivales, dejando para más tarde la discusión de las diferencias en los resultados que se derivan de la elección de distintas definiciones. ¿Alguien puede ofrecer algo que incluso la

definición más restrictiva autorice como contraejemplo real?

KAPA: ¿Incluyendo la *Def. P*?

MAESTRO: Excluyendo la *Def. P*.

GAMMA: Yo puedo hacerlo. Miren este *Contraejemplo 3:* un poliedro estelar que llamaré un *erizo* (fig. 7). Consta de doce pentágonos estrellados (fig. 8). Posee 12 vértices, 30 aristas y 12 caras pentagonales; pueden ustedes comprobarlo contándolos, si quieren. Así pues, la tesis de Descartes-Euler no es en absoluto verdadera, ya que en este poliedro $V - A + C = 6$[25].

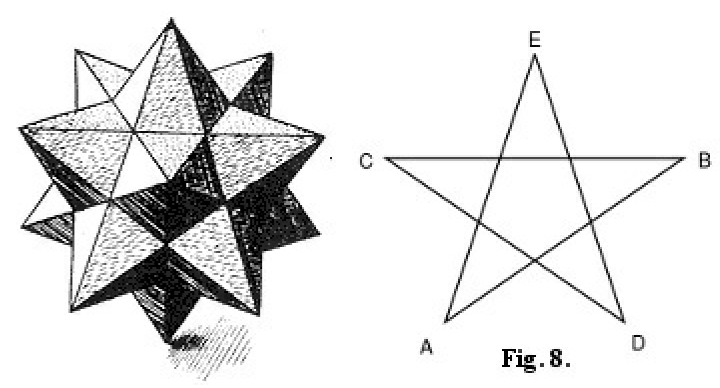


Fig. 7. Poliedro estelar de Kepler; cada cara va sombreada de manera diferente, para mostrar que triángulos pertenecen a la misma cara pentagonal.

DELTA: ¿Por qué piensa usted que su «erizo» es un poliedro?

GAMMA: ¿No lo ve usted? Se trata de un poliedro cuyas caras son los doce pentágonos estrellados. Satisface su última definición, pues se trata de un «sistema de polígonos dispuestos de modo que (1) en cada arista se encuentran exactamente dos polígonos y (2) es posible pasar de cualquier polígono a otro cualquiera sin cruzar nunca un vértice del poliedro».

DELTA: Pero, entonces, usted ni siquiera sabe lo que es un polígono. ¡No cabe duda que un pentágono estrellado no es un polígono! *Un polígono es un sistema de aristas dispuestas de tal modo que (1) en cada vértice se encuentren exactamente dos aristas y (2) que las aristas no posean puntos en común, excepción hecha de los vértices.*

MAESTRO: Llamémosla *Def. 4.*

GAMMA: No veo por qué incluye usted la segunda cláusula. La definición correcta de polígono debería contener solamente la primera.

MAESTRO: *Def. 4'*.

GAMMA: La segunda cláusula nada tiene que ver con la esencia de un polígono. Mire, si levanto un poco una arista, el pentágono estrellado es ya un polígono incluso en su sentido. Usted imagina que un polígono ha de ser pintado con tiza sobre el encerado, pero debiera imaginarlo como una estructura de madera. En ese caso, está claro que lo que usted considera como un punto común no es en realidad un punto, sino dos puntos distintos, uno sobre el otro. La confusión se debe a incluir el polígono en un plano; debería dejar que sus piernas se estiraran en el espacio[26].

DELTA: ¿Le importaría decirme cuál es el *área* de un pentágono estrellado? ¿O, acaso diría usted que algunos polígonos no tienen área?

GAMMA: ¿Acaso no fue usted mismo quien dijo que un poliedro no tiene nada que ver con la idea de solidez? ¿Por qué sugerir ahora que la idea de polígono haya de conexionarse con la idea de área? Nos hemos puesto de acuerdo en que un poliedro es una superficie cerrada con aristas y vértices; ¿por qué no convenir que un polígono no es más que una curva cerrada con vértices? Ahora bien, si se empecina usted en su idea, estoy dispuesto a definir el área del polígono estrellado[27].

MAESTRO: Dejemos por el momento esta disputa y procedamos como antes. Consideremos conjuntamente las dos últimas definiciones, la *Def. 4* y la *Def. 4'*. ¿Puede alguien poner un contraejemplo de nuestra conjetura que se amolde a *ambas* definiciones de polígono?

ALFA: He aquí uno. Considérese un *marco de cuadro* como éste (fig. 9). Se trata de un poliedro, según cualquiera de las definiciones hasta ahora propuestas. Con todo, si cuenta usted los vértices, aristas y caras, hallará que $V - A + C = 0$.

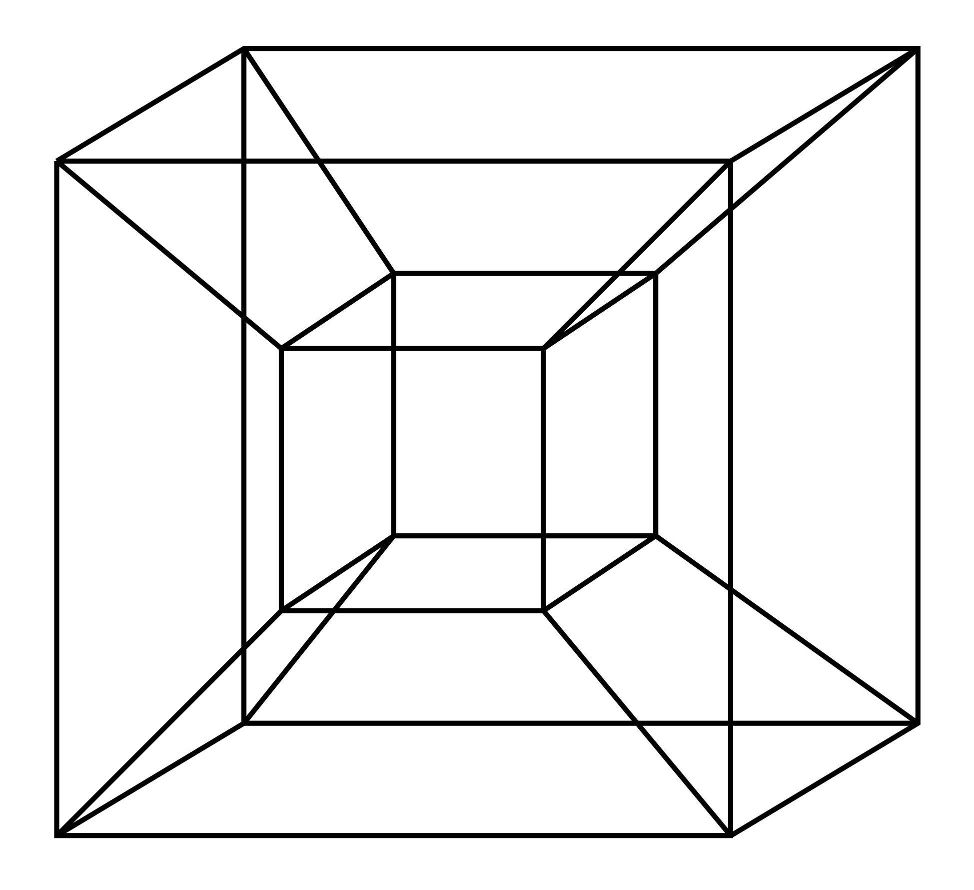


Fig. 9.

MAESTRO: *Contraejemplo 4*[28].

BETA: Así que éste es el fin de nuestra conjetura. Realmente, es una pena, después de haberse sostenido en tantísimos casos. Pero parece que no hemos hecho más que perder el tiempo.

ALFA: Delta, estoy sorprendido. ¿No dice usted nada? ¿No puede usted aniquilar este contraejemplo mediante una definición? Pensé que no había hipótesis en este mundo que usted no pudiese salvar de la falsación mediante un conveniente truco lingüístico. ¿Se rinde usted ahora? ¿Acaso acepta usted al fin que existen poliedros no-eulerianos? ¡Increíble!

DELTA: Realmente, debería usted hallar un nombre más apropiado para sus plagas no-eulerianas, sin confundirnos a todos denominándolas «poliedros». Sin embargo, pierdo gradualmente interés por sus monstruos. Vuelvo disgustado la cabeza ante sus lamentables «poliedros», para los que no vale el bello teorema de Euler[29]. Yo busco el orden y la armonía en las

matemáticas, mientras que usted sólo propaga anarquía y caos[30]. Nuestras posturas son irreconciliables.

ALFA: ¡Usted sí que es un verdadero conservador pasado de moda! Abomina usted de la maldad de los anarquistas por echar a perder su «orden» y «armonía», y «resuelve» usted las dificultades con recomendaciones verbales.

MAESTRO: Oigamos la última definición de rescate.

ALFA: ¡Querrá usted decir el último truco lingüístico, la última contracción del concepto de «poliedro»! Delta disuelve los problemas reales en lugar de resolverlos.

DELTA: No soy yo quien *contrae* los conceptos, sino usted quien los *expande*. Por ejemplo, ese marco de cuadro no es en absoluto un poliedro genuino.

ALFA: ¿Por qué?

DELTA: Tome usted un punto arbitrario en el «túnel», en el espacio limitado por el marco. Pase un plano por dicho punto y hallará que dicho plano posee siempre *dos* secciones distintas con el marco, formando dos polígonos distintos y totalmente desconexos. (fig. 10.)

ALFA: ¿Y qué?

DELTA: *En el caso de un poliedro genuino, por un punto arbitrario del espacio habrá al menos un plano cuya sección con el poliedro constará de un solo polígono.* En el caso de los poliedros convexos, *todos* los planos cumplirán este requisito, sea cual sea el lugar en que tomemos el punto. En el caso de los poliedros cóncavos *ordinarios*, algunos planos tendrán más intersecciones, aunque siempre habrá algunas que sólo tengan una (fig. 11, (*a*) y (*b*)). En el caso de este marco de cuadro, si tomamos el punto en el túnel, todos los planos tendrán dos secciones, ¿cómo puede usted entonces llamar a esto un poliedro?

MAESTRO: Esto parece ser otra definición, aunque esta vez es una definición *implícita*. Llamémosla *Def. 5*[31].

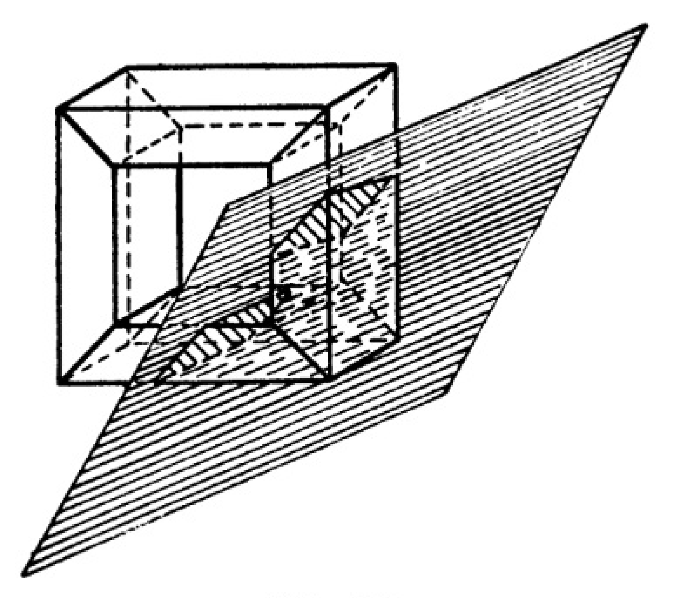
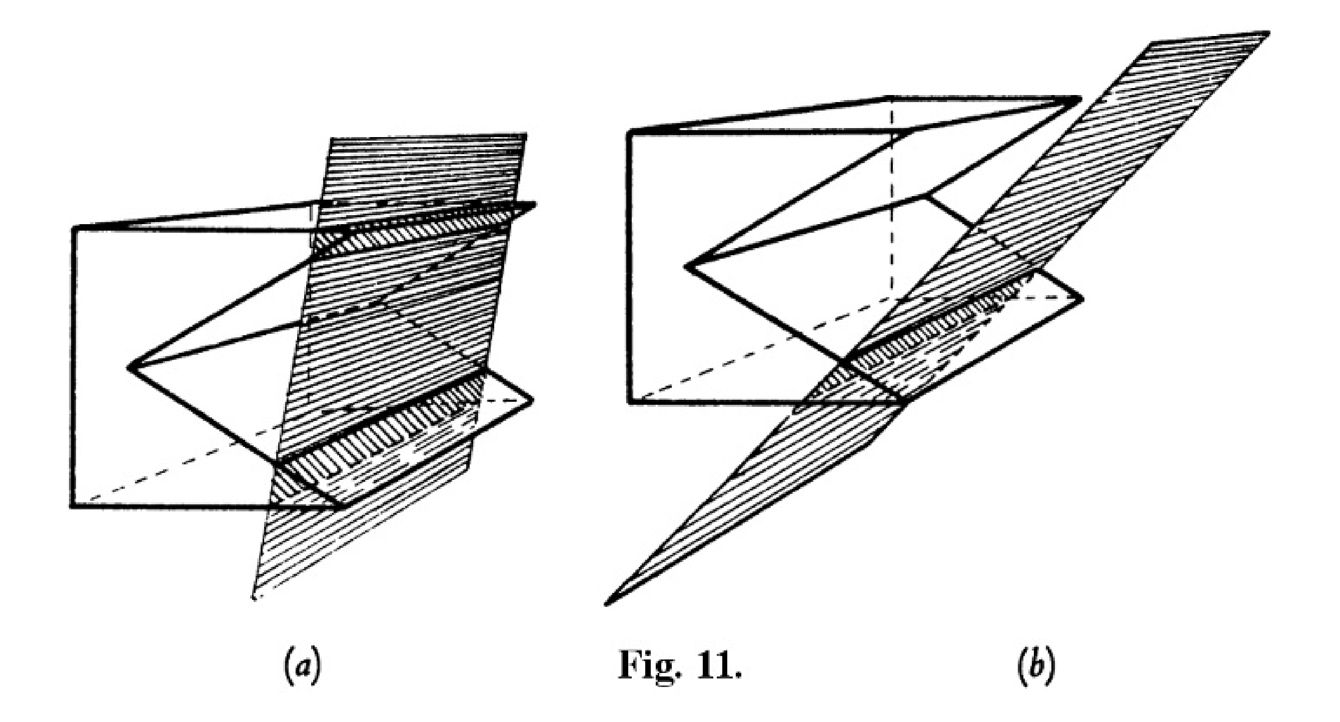


Fig. 10.



(*a*) **Fig. 11.** (*b*)

ALFA: Una serie de contraejemplos, una serie adecuada de definiciones, definiciones que se pretende que no contienen nada nuevo, sino que son sencillamente nuevas revelaciones de la riqueza de ese único concepto viejo que parece tener tantas cláusulas «ocultas» cuantos contraejemplos haya. Parece que *para todo poliedro,* $V - A + C = 2$ es inquebrantable, es una vieja

y «eterna» verdad. Es extraño pensar que en un tiempo fue una maravillosa ocurrencia llena de posibilidades y emociones. Ahora, gracias a sus endemoniados cambios de significado, se ha convertido en una pobre convención, en un despreciable dogma. *(Abandona el aula.)*

DELTA: No puedo comprender cómo una persona tan capaz como Alfa puede desperdiciar su talento limitándose a poner pegas. Parece enfrascado en la producción de monstruosidades, cuando las monstruosidades nunca promueven el desarrollo ni en el mundo de la naturaleza ni en el del pensamiento. La evolución siempre sigue un patrón armonioso y ordenado.

GAMMA: Los genéticos pueden refutar eso con facilidad. ¿Acaso no ha oído usted que las mutaciones productoras de monstruosidades desempeñan un papel considerable en la macroevolución? Llaman a esos mutantes monstruosos «monstruos esperanzadores». Me parece que los contraejemplos de Alfa, aunque monstruos, son «monstruos esperanzadores»[32].

DELTA: En cualquier caso, Alfa ha abandonado la lucha. Dejémonos ahora de monstruos.

GAMMA: Tengo uno nuevo. Se adecúa a todas las restricciones de las Defs. 1, 2, 3, 4 y 5, pero aun así $V - A + C = 1$. Este *Contraejemplo 5* es un mero cilindro. Posee 3 caras (la tapadera, el fondo y la cubierta), 2 aristas (dos círculos) y ningún vértice. Se trata de un poliedro, según su definición: (1) exactamente dos polígonos en cada arista y (2) es posible pasar del interior de un polígono al interior de otro cualquiera por un camino que nunca cruza una arista por un vértice. Además, ha de aceptar usted las caras como genuinos polígonos, puesto que se adecúan a sus requisitos: (1) en cada vértice se encuentran exactamente dos aristas y (2) las aristas no poseen puntos en común que no sean los vértices.

DELTA: Alfa estiraba los conceptos, pero usted los desgarra. Sus «aristas» no son aristas. *¡Una arista posee dos vértices!*

MAESTRO: *¿Def. 6?*

GAMMA: Mas, ¿por qué negar la condición de «arista» a las que tienen un solo vértice o quizá ninguno? Usted acostumbraba a contraer los conceptos, pero ahora los mutila de modo que apenas queda nada.

DELTA: ¿Pero acaso no ve usted la futilidad de estas llamadas

refutaciones? «Hasta ahora, cuando se inventaba un nuevo poliedro, se hacía por algún fin práctico; hoy en día se inventan expresamente para poner pegas a los razonamientos de nuestros padres y nunca sacaremos de ellos más que eso. Nuestro campo de estudio se ha tornado en un museo teratológico en el que los poliedros ordinarios y decentes se pueden dar con un canto en los dientes si logran asegurarse un rinconcito»[33].

GAMMA: Pienso que si queremos aprender algo realmente profundo acerca de una cosa, hemos de estudiarla no en su forma «normal», regular o usual, sino en su estado crítico, febril y apasionado. Si desea usted conocer el cuerpo normal y saludable, estúdielo cuando es anormal, cuando está enfermo. Si quiere usted conocer las funciones, estudie sus singularidades. Si quiere usted conocer los poliedros ordinarios, estudie sus lindes lunáticas. Es así como se puede llevar el análisis matemático al corazón mismo del problema[34]. Mas, aun cuando estuviese usted básicamente en lo cierto, ¿no ve usted la futilidad de su método *ad hoc*? Si quiere trazar usted una divisoria entre contraejemplos y monstruos, no puede usted hacerlo a trompicones.

MAESTRO: Pienso que deberíamos negarnos a aceptar la estrategia de Delta para enfrentarse a contraejemplos globales, si bien hemos de felicitarle por lo hábilmente que lo hace. Podemos etiquetar adecuadamente su método como *el método de exclusión de monstruos.* Con este método se puede eliminar cualquier contraejemplo de la conjetura original, mediante una hábil aunque siempre *ad hoc* redefinición de poliedro, de sus términos definitorios o de los términos definitorios de sus términos definitorios. De algún modo, deberíamos tratar con más respeto los contraejemplos, sin exorcizarlos tercamente, motejándolos de monstruos. Tal vez el error fundamental de Delta sea su prejuicio dogmático en la interpretación de la prueba matemática: piensa que una prueba demuestra necesariamente lo que se ha propuesto demostrar. Mi interpretación de la prueba permitirá que se «demuestre» una conjetura *falsa;* es decir, permitirá que se descomponga en subconjeturas. Si la conjetura es falsa, espero ciertamente que al menos una de las subconjeturas sea falsa. ¡Pero la descomposición puede seguir siendo interesante! No me preocupa hallar un contraejemplo de una conjetura «demostrada»; ¡incluso estoy dispuesto a ponerme a «probar» una conjetura falsa!

ZETA: No le sigo.

KAPA: No hace más que seguir el Nuevo Testamento: «Probadlo todo; quedáos con lo bueno» (Tesalonicenses, 1, 5: 21).

(c) Mejoras en la conjetura mediante métodos de exclusión de excepciones. Exclusiones fragmentadas. Retirada estratégica o búsqueda de seguridad

BETA: Supongo, señor, que va usted a explicarnos sus sorprendentes observaciones. Pero, pidiendo toda clase de disculpas por mi impaciencia, he de confesar algo.

MAESTRO: Adelante.

(ALFA *entra de nuevo.*)

BETA: Encuentro feos algunos aspectos de los argumentos de Delta, aunque he llegado a convencerme de que existe en ellos un meollo razonable. Me parece ahora que ninguna conjetura es generalmente válida, sino tan sólo válida en un dominio restringido que excluye las *excepciones.* Estoy en contra de tildar de «monstruos» o «casos patológicos» a esas excepciones. Ello equivaldría a la decisión metodológica de no considerarlas como *ejemplos* interesantes por derecho propio, merecedoras de una investigación propia. Pero también estoy en contra del término *«contraejemplo»,* puesto que de ese modo se las toma como ejemplos en pie de igualdad con los ejemplos positivos, si bien los pinta de algún modo con los colores de guerra. De ese modo, al enfrentarse a ellos, uno es presa del pánico, como Gamma, y se siente tentado a abandonar hermosas e ingeniosas pruebas. No: no son sino *excepciones.*

SIGMA: Yo no podría estar más de acuerdo. El término «contraejemplo» tiene un matiz agresivo que ofende a quienes han inventado las pruebas. La expresión correcta es «excepción». «Hay tres tipos de proposiciones matemáticas:

»1. Las que siempre son verdaderas y para las que no hay ni restricciones ni excepciones; por ejemplo, la suma de los ángulos de todos los triángulos planos es siempre igual a dos ángulos rectos.

»2. Las que descansan en algún principio falso, por lo que no pueden ser admitidas de ningún modo.

»3. Las que, aunque se articulan sobre principios verdaderos, con todo admiten restricciones o excepciones en algunos casos…»

EPSILON: ¿Qué?

SIGMA: «… No habría que confundir los teoremas falsos con los teoremas sujetos a alguna restricción»[35]. Como dice el proverbio: *la excepción demuestra la regla*.

EPSILON [*a* KAPA]: ¿Quién es ese majadero? Debería aprender algo de lógica.

KAPA [*a* EPSILON]: Y también de triángulos planos no-euclídeos.

DELTA: Encuentro embarazoso tener que predecir que en esta discusión es probable que Alfa y yo estemos del mismo lado. Ambos argumentábamos sobre la base de que una proposición es o verdadera o falsa, discrepando tan sólo acerca de si el teorema de Euler en concreto era verdadero o falso. Sin embargo, Sigma quiere que admitamos una tercera categoría de proposiciones «en principio» verdaderas, aunque «admiten excepciones en algunos casos». Aceptar una coexistencia pacífica de teoremas y excepciones significa ceder a la confusión y el caos en matemáticas.

ALFA: *D'accord*.

ETA: No quise interferir con la brillante argumentación de Delta, pero ahora creo que puede ser provechoso que explique brevemente la historia de *mi* desarrollo intelectual. En mi época de estudiante, me convertí, como dirían ustedes, en un excluidor de monstruos; no como defensa contra tipos como Alfa, sino como defensa contra tipos como Sigma. Recuerdo haber leído en una revista lo siguiente acerca del teorema de Euler: «Brillantes matemáticos han propuesto pruebas de la validez general del teorema. Sin embargo, sufre excepciones… es necesario llamar la atención sobre dichas excepciones, puesto que incluso autores recientes no siempre las reconocen explícitamente»[36]. Este artículo no era un ejercicio de diplomacia aislado. «Aun cuando en las conferencias y libros de texto de geometría se señala siempre que el bello teorema de Euler, $V + C = A + 2$, está sujeto en algunos casos a "restricciones" o "no parece ser válido", no se descubren las razones reales de estas excepciones»[37]. He examinado ahora las «excepciones» con todo cuidado y he llegado a la conclusión de que no se ajustan a la verdadera

definición de las entidades en cuestión. Así, la prueba y el teorema se pueden reinstaurar, desvaneciéndose la caótica coexistencia de teoremas y excepciones.

ALFA: La caótica posición de Sigma puede servir como explicación de su exclusión de monstruos, pero no como excusa, por no hablar de justificación. ¿Por qué no eliminar el caos, aceptando las credenciales del contraejemplo y rechazando el «teorema» y la «demostración»?

ETA: ¿Por qué habría de rechazar la prueba? No veo nada malo en ella. ¿Acaso usted ve algo malo? Mi exclusión de monstruos me parece más racional que su exclusión de pruebas.

MAESTRO: Este debate ha mostrado que la exclusión de monstruos puede obtener una audiencia más favorable cuando surge del dilema de Eta. Pero retornemos a Beta y Sigma. Fue Beta quien rebautizó como excepciones los contraejemplos. Sigma estuvo de acuerdo con Beta…

BETA: Me alegra que Sigma estuviese de acuerdo conmigo, pero me temo que yo no pueda estar de acuerdo con él. Es cierto que hay tres tipos de proposiciones: las verdaderas, las falsas sin esperanza y las esperanzadoramente falsas. Este último tipo se puede mejorar, convirtiéndolas en verdaderas al añadirles una cláusula restrictiva que enuncie las excepciones. Yo nunca «atribuyo a las fórmulas un dominio indeterminado de validez. En realidad, la mayoría de las fórmulas son verdaderas sólo si se satisfacen ciertas condiciones. Al determinar esas condiciones y, naturalmente, al fijar con precisión el significado de los términos que utilizo, hago desaparecer toda incertidumbre»[38]. Así, como usted ve, no abogo por ninguna coexistencia pacífica entre las fórmulas no mejoradas y las excepciones. Mejoro mis fórmulas y las convierto en *perfectas*, como las de la primera clase de Sigma. Eso significa que *acepto* el método de exclusión de monstruos en la medida en que sirva para hallar *el dominio de validez de la conjetura original*, mientras que lo *rechazo* en la medida en que funcione como truco lingüístico para salvar teoremas «agradables» mediante conceptos restrictivos. Habría que mantener separadas ambas funciones del método de Delta. Me gustaría bautizar *mi* método, caracterizado tan sólo por la primera de las funciones, *«el método de exclusión de excepciones»*. Lo utilizaré para determinar con precisión el

dominio en el que se sostiene la conjetura de Euler.

MAESTRO: ¿Cuál es el «dominio determinado con precisión» de los poliedros eulerianos que nos ha prometido? ¿Cuál es su «fórmula perfecta»?

BETA: *Para todos los poliedros que no presentan cavidades (como el par de cubos encajados) y túneles (como el marco de cuadro),* $V - A + C = 2$.

MAESTRO: ¿Está usted seguro?

BETA: Sí, lo estoy.

MAESTRO: ¿Y qué pasa con los tetraedros gemelos?

BETA: Perdón: *Para todos los poliedros que no tengan cavidades, túneles o «estructura múltiple»,* $V - A + C = 2$[39].

MAESTRO: Ya veo. Estoy de acuerdo con su política de mejorar la conjetura en vez de tomarla o dejarla. La prefiero tanto al método de exclusión de monstruos como al de la rendición. Con todo, tengo dos objeciones. *Primera*, tengo por insostenible su pretensión de que su método no sólo mejora, sino que hace «perfecta» la conjetura; es decir, que «la convierte en estrictamente correcta», que «hace desaparecer todas las incertidumbres».

BETA: ¿De veras?

MAESTRO: Ha de admitir usted que cada nueva versión de su conjetura no es más que una eliminación *ad hoc* de un contraejemplo que acaba de surgir. Cuando tropieza con los cubos encajados, excluye los poliedros con *cavidades*. Cuando cae en la cuenta de la existencia de un marco de cuadro, excluye los poliedros con *túneles*. Aprecio su mentalidad abierta y observadora; está muy bien tener en cuenta estas excepciones, pero pienso que merecería la pena inyectar algún método en su ciego modo de tantear las «excepciones». Está bien admitir que «Todos los poliedros son eulerianos» no es más que una conjetura, pero, ¿por qué conceder a «Todos los poliedros sin cavidades, túneles y similares son eulerianos» la condición de un teorema que ya no es conjetural? ¿Cómo puede usted estar seguro de haber enumerado *todas las excepciones*?

BETA: ¿Puede usted proponer una que yo no haya tenido en cuenta?

ALFA: ¿Qué me dice usted de mi erizo?

GAMMA: ¿Y de mi cilindro?

MAESTRO: Para mi argumento ni siquiera preciso nuevas «excepciones» concretas. Mi argumento acudía a la *posibilidad* de ulteriores excepciones.

BETA: Puede usted estar perfectamente en lo cierto. No se debería cambiar meramente de posición cada vez que aparece un nuevo contraejemplo. No se debería decir: «Si de los fenómenos no surgen excepciones, la conclusión puede afirmarse en general. Pero, si apareciese alguna excepción en un momento posterior, hay que empezar a afirmarla con las excepciones que tengan lugar»[40]. Déjeme pensar. Barruntábamos al principio que para todo poliedro $V - A + C = 2$, puesto que hallamos que era verdad en el caso de los cubos, octaedros, pirámides y prismas. Ciertamente, no podemos aceptar «este modo miserable de inferencia de lo especial a lo general»[41]. No es de extrañar que surgiesen excepciones; lo extraño es que no apareciesen más mucho antes. Para mí que ello fue debido a que nos ocupábamos fundamentalmente de poliedros *convexos.* Tan pronto como hicieron aparición otros poliedros, nuestra generalización dejó de funcionar[42]. Así pues, en vez de excluir las excepciones una a una, trazaré la línea de separación con modestia, aunque con seguridad: *Todos los poliedros convexos son eulerianos*[43]. Espero que se me conceda que esto no tiene nada de conjetural, que es un teorema.

GAMMA: ¿Qué pasa con mi cilindro? ¡Es convexo!

BETA: Lo que es es un chiste.

MAESTRO: Olvidémonos del cilindro por el momento. Podemos ofrecer algunas críticas aun sin el cilindro. En esta nueva versión modificada del método de exclusión de excepciones, que Beta ha ingeniado de un modo tan vivo en respuesta a mi crítica, el rechazo pieza a pieza ha sido sustituido por una retirada estratégica a un dominio que se espera sea el bastión de la conjetura. Está usted jugando a lo seguro, pero ¿acaso está usted tan seguro como pretende? Aún no posee ninguna garantía de que no haya excepciones en el interior de su bastión. Además, existe el peligro opuesto. ¿No podría usted haber hecho una retirada demasiado radical, dejando fuera de las murallas cientos de poliedros eulerianos? Nuestra conjetura original tal vez haya sido una pretensión excesiva, pero su tesis «perfecta» me parece más bien una pretensión escasa. Y, sin embargo, ni siquiera puede usted estar seguro de que no sea también excesiva.

Pero querría exponer también mi *segunda* objeción: su argumento se olvida de la prueba; al barruntar el dominio de validez de la conjetura, parecería que usted no necesita la prueba en absoluto. ¿Sin duda usted no cree que las pruebas sean redundantes?

BETA: Nunca he dicho tal cosa.

MAESTRO: No, no lo ha hecho usted; pero usted descubrió que nuestra prueba no demostraba nuestra conjetura original. ¿Acaso demuestra su conjetura mejorada? Dígame.

BETA: Bueno…[44]

ETA: Gracias, señor, por este argumento. El embarazo de Beta muestra a las claras la superioridad del difamado método de exclusión de monstruos. En efecto, decimos que las pruebas demuestran lo que se han puesto a demostrar y nuestra respuesta es inequívoca. No permitimos que contraejemplos incontrolados destruyan libremente pruebas respetables, aun cuando se disfracen de meras «excepciones».

BETA: No tengo en absoluto por embarazoso tener que elaborar, mejorar y, discúlpeme señor, *perfeccionar* mi metodología bajo el estímulo de la crítica. Mi respuesta es ésta. Rechazo como falsa la conjetura original, puesto que tiene excepciones. También rechazo la demostración porque las mismas excepciones son excepciones a uno al menos de los lemas. (Con su terminología, habría que decir: un contraejemplo global es también necesariamente un contraejemplo local.) Alfa se detendría en este punto, ya que la refutación parece satisfacer plenamente sus exigencias intelectuales. Pero yo sigo adelante. Al restringir convenientemente *tanto* la conjetura como la prueba a su dominio propio, perfecciono la *conjetura* que será ahora *verdadera* y perfecciono también la *prueba* básicamente correcta, que será ahora *rigurosa* y no contendrá obviamente más lemas falsos. Por ejemplo, hemos visto que no todos los poliedros se pueden estirar en un plano tras haberles quitado una cara. Pero eso se puede hacer con todos los poliedros *convexos*. Puedo llamar con todo derecho *teorema* a mi conjetura perfeccionada y rigurosamente probada. Puedo enunciar de nuevo: *«Todos los poliedros convexos son eulerianos»*. Para los poliedros convexos todos los lemas serán manifiestamente verdaderos y la prueba, que no era rigurosa en su falsa generalidad, lo será para el dominio restringido de los poliedros

convexos. Así, señor, he respondido a su pregunta.

MAESTRO: De ese modo, los lemas, que antes del descubrimiento de la excepción parecían manifiestamente verdaderos, parecerán de nuevo manifiestamente verdaderos… hasta el descubrimiento de la próxima excepción. Admite usted que «Todos los poliedros son eulerianos» era una suposición; admitía usted hace un momento que «Todos los poliedros sin cavidades y sin túneles son eulerianos» era también una suposición; ¡por qué no admitir que «Todos los poliedros convexos son eulerianos» es, una vez más, una suposición!

BETA: Nada de *«barruntos»* esta vez; se trata de *«intuición»*.

MAESTRO: Aborrezco su pretenciosa «intuición». Respeto los *barruntos* conscientes, pues vienen de las mejores cualidades humanas: valor y modestia.

BETA: Propuse un teorema: «Todos los poliedros convexos son eulerianos», pero todo lo que usted ofrece en contra es un sermón. ¿Podría usted ofrecer un contraejemplo?

MAESTRO: No puede usted saber que no pueda. Ha *mejorado* usted la conjetura original, pero no puede usted pretender haber logrado la *perfección*, haber conseguido un rigor perfecto en su prueba.

BETA: ¿Acaso puede *usted*?

MAESTRO: Tampoco yo puedo. Pero estimo que mi método de mejorar las conjeturas representará una mejora respecto al suyo, puesto que estableceré una unidad, una interacción real entre pruebas y contraejemplos.

BETA: Estoy pronto a aprender.

(d) El método de ajustar monstruos

RO: Señor, ¿puedo aprovechar para decir unas palabras?

MAESTRO: Por supuesto.

RO: Estoy de acuerdo en que hemos de rechazar la exclusión de monstruos de Delta como enfoque metodológico general, puesto que no toma en serio realmente los «monstruos». Beta tampoco toma en serio sus «excepciones», puesto que se limita a hacer una lista con ellas y, a

continuación, se retira a un dominio seguro. Así, ambos métodos están tan sólo interesados en un campo privilegiado y limitado. *Mi* método no practica discriminaciones. Puedo mostrar que «tras un examen más detenido, las excepciones resultan ser sólo aparentes y el teorema de Euler mantiene su validez incluso frente a las pretendidas excepciones»[45].

MAESTRO: ¿De veras?

ALFA: ¿Cómo puede ser un poliedro euleriano ordinario mi contraejemplo 3, el «erizo» (fig. 5)? Posee doce caras pentagonales estrelladas…

RO: No veo «pentágono estrellado» alguno. ¿No ve usted que de hecho este poliedro posee caras *triangulares* ordinarias? Hay 60 de ellas. También posee 90 aristas y 32 vértices. Su «característica euleriana» es 2[46]. Los 12 «pentágonos estrellados», con sus 30 «aristas» y 12 «vértices», que suministra la «característica» 6, no son más que un producto de su imaginación. No existen monstruos, sino tan sólo interpretaciones monstruosas. Hay que purgar la mente de ilusiones pervertidas; hay que aprender a ver y a definir correctamente lo que se ve. Mi método es terapéutico: allí donde usted «ve» erróneamente un contraejemplo, yo le enseño a reconocer correctamente un ejemplo. Ajusto su visión monstruosa…[47]

ALFA: Por favor, señor, explíquenos *su* método antes de que Ro nos lave el cerebro[48].

MAESTRO: Dejémosle seguir.

RO: Ya he expuesto mi posición.

GAMMA: ¿Puede usted ampliar su crítica del método de Delta? Ambos exorcizan los «monstruos»…

RO: Delta fue presa de las alucinaciones de rodos ustedes. Estaba de acuerdo con que su «erizo» tenía 12 caras, 30 aristas y 12 vértices, por lo que no era euleriano. Su tesis era que tampoco constituía un poliedro. Pero se equivocó en ambas cuestiones. Su «erizo» *es* un poliedro y *es* euleriano. Lo que ocurre es que la interpretación estelar resultó ser una *mala* interpretación. Si me lo permite, no se trata de la huella del erizo en una mente sana y pura, sino de su imagen distorsionada en una mente enferma, retorciéndose de dolor[49].

KAPA: ¿Pero, cómo puede usted distinguir las mentes sanas de las enfermas, las interpretaciones racionales de las monstruosas?[50]

RO: ¡Lo que me sorprende es que las pueda mezclar usted!

SIGMA: ¿Acaso piensa usted realmente, Ro, que Alfa nunca constató la posibilidad de interpretar su «erizo» como un poliedro triangular? Por supuesto que es posible. Pero, un examen más atento revela que esos «triángulos están siempre en grupos de cinco en el mismo plano y rodean un pentágono regular oculto, como su corazón, tras un ángulo sólido. Ahora, los cinco triángulos regulares junto con el pentágono regular forman un llamado “pentagrama”, que según Teofrasto Paracelso era el signo de la salud…»[51]

RO: ¡Supersticiones!

SIGMA: Y así, para la mente *sana* quedará revelado el secreto del erizo: se trata de un nuevo cuerpo regular no soñado hasta ahora, con caras regulares y ángulos sólidos regulares, cuya bella simetría podría revelarnos los secretos de la armonía universal…[52]

ALFA: Gracias, Sigma, por su defensa, que me convence una vez más de que los oponentes son menos embarazosos que los aliados. Por supuesto que mi figura poliédrica se puede interpretar como un poliedro triangular o como un poliedro estrellado. Estoy dispuesto a admitir ambas interpretaciones en pie de igualdad…

KAPA: ¿Es eso cierto?

DELTA: Pero, no cabe duda de que una de ellas es la *verdadera* interpretación.

ALFA: Estoy dispuesto a admitir ambas interpretaciones en pie de igualdad, pero una de ellas constituirá con certeza un contraejemplo global de la conjetura de Euler. ¿Por qué admitir tan sólo la interpretación que está «bien ajustada» a los prejuicios de Ro? En cualquier caso, Señor, ¿nos explicará ahora *su* método?

(e) Mejora en la conjetura por el método de incorporación de lemas. El teorema engendrado por la prueba frente a la conjetura ingenua

MAESTRO: Volvamos al marco de cuadro. Por mi parte, reconozco que

constituye un genuino contraejemplo global de la conjetura de Euler, así como un contraejemplo local del primer lema de mi prueba.

GAMMA: Perdón, Señor, pero, ¿cómo refuta el primer lema este marco de cuadro?

MAESTRO: Elimine primero una cara e intente luego estirarlo plano sobre el encerado. *No* podrá usted.

ALFA: Como ayuda a la imaginación, le diré que aquellos y sólo aquellos poliedros que se pueden inflar en una esfera poseen la propiedad de que, tras eliminar una cara, se puede estirar la parte restante sobre un plano.

Es obvio que semejante poliedro «esférico» se puede estirar sobre un plano, después de eliminar una cara; y viceversa, resulta igualmente obvio que, si un poliedro menos una cara se puede estirar sobre un plano, entonces puede usted doblarlo en forma de un vaso redondeado que se puede cubrir a continuación con la cara que falta, obteniendo así un poliedro esférico. Sin embargo, nuestro marco de cuadro nunca se podrá inflar hasta que forme una esfera, sino tan sólo hasta formar un toro.

MAESTRO: Muy bien. Ahora bien, frente a Delta, acepto este marco de cuadro como crítica de la conjetura. Por consiguiente, descarto como falsa la conjetura en su forma original, si bien propongo inmediatamente una versión modificada y restringida; a saber, la conjetura de Descartes-Euler se mantiene para poliedros «simples», es decir, para aquellos que se pueden estirar sobre el plano después de quitarles una cara. De este modo, hemos rescatado, algo de la hipótesis original. Tenemos: *La característica de Euler de un poliedro simple es 2.* Esta tesis no quedará falsada por el cubo encajado, los tetraedros gemelos o los poliedros estrellados, ya que ninguno de ellos es «simple».

Así, mientras que el método de exclusión de excepciones restringía tanto el dominio de la conjetura principal como el lema culpable a un común dominio de seguridad, aceptando de ese modo el contraejemplo como crítica no sólo de la conjetura principal, sino también de la prueba, mi método de incorporación de lemas sostiene la prueba, aunque reduce el dominio de la conjetura principal al dominio propio del lema culpable. O, mientras que un contraejemplo a la vez global y local hacía que el excluidor de excepciones revisase tanto los lemas como la conjetura original, me hace revisar a mí la conjetura original, pero no los lemas. ¿Comprende usted?

ALFA: Sí, creo que sí. Para mostrarle que he comprendido, lo refutaré.

MAESTRO: ¿Mi método o mi conjetura mejorada?

ALFA: Su conjetura mejorada.

MAESTRO: Entonces, puede que usted no haya comprendido aún mi método. Pero, venga su contraejemplo.

ALFA: Considérese un cubo con otro cubo menor asentado sobre él (fig. 12). Satisface todas nuestras definiciones (la *Def. 1, 2, 3, 4, 4', 5*), por lo cual es un poliedro genuino. También es «simple», puesto que puede ser estirado sobre un plano. Así, de acuerdo con su conjetura modificada, su característica euleriana debiera ser 2. Con todo, posee 16 vértices, 24 aristas y 11 caras, y su característica de Euler es 16 - 24 + 11 = 3. Constituye un contraejemplo global de su conjetura mejorada y, de paso, también del primer teorema «excluidor de excepciones» de Beta. Este poliedro, a pesar de no tener cavidades ni túneles o «estructura múltiple», *no* es euleriano.

DELTA: Llamemos *Contraejemplo 6* a este cubo con cresta[53].

MAESTRO: Ha falsado usted mi conjetura mejorada, pero *no* ha destruido usted mi método de mejora. Reexaminaré la prueba para ver por qué se ha venido abajo con su poliedro. Debe haber otro lema falso en la prueba.

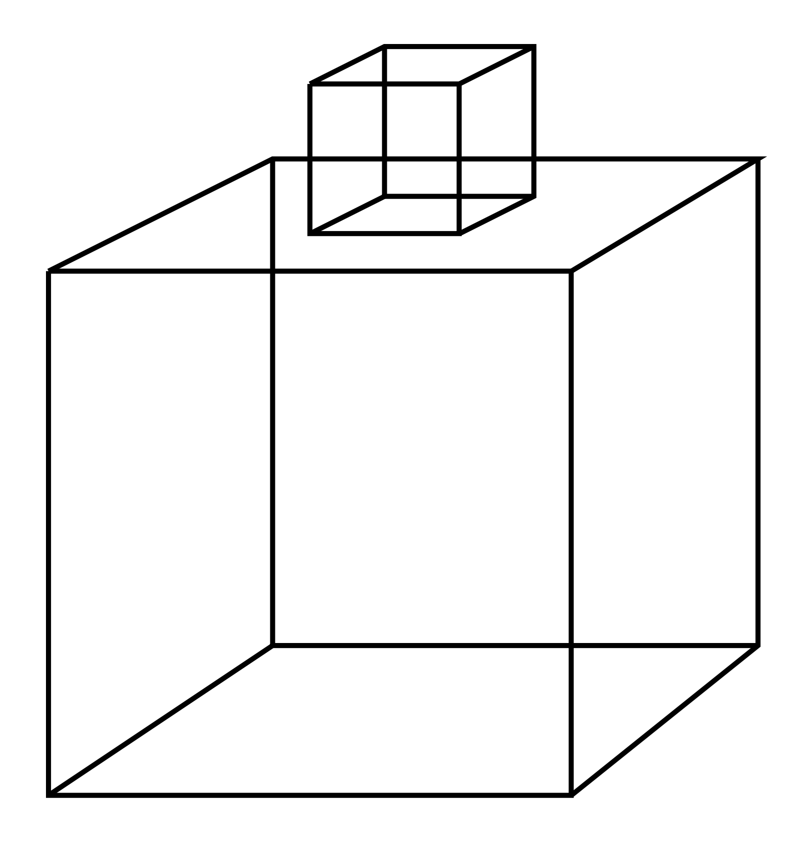


Fig. 12.

BETA: Por supuesto que lo hay. Siempre he sospechado del segundo lema. Presupone que en el proceso de triangulación se aumenta siempre en uno el número de aristas y caras al trazar una nueva arista diagonal. Eso es falso. Si miramos el entramado plano de nuestro poliedro con cresta, hallaremos una cara en forma de anillo (fig. 13(*a*)). En este caso, ninguna arista diagonal aumentará el número de caras (fig. 13 (*b*)): precisamos un aumento de dos aristas para aumentar en uno el número de caras (fig. 13(*c*)).

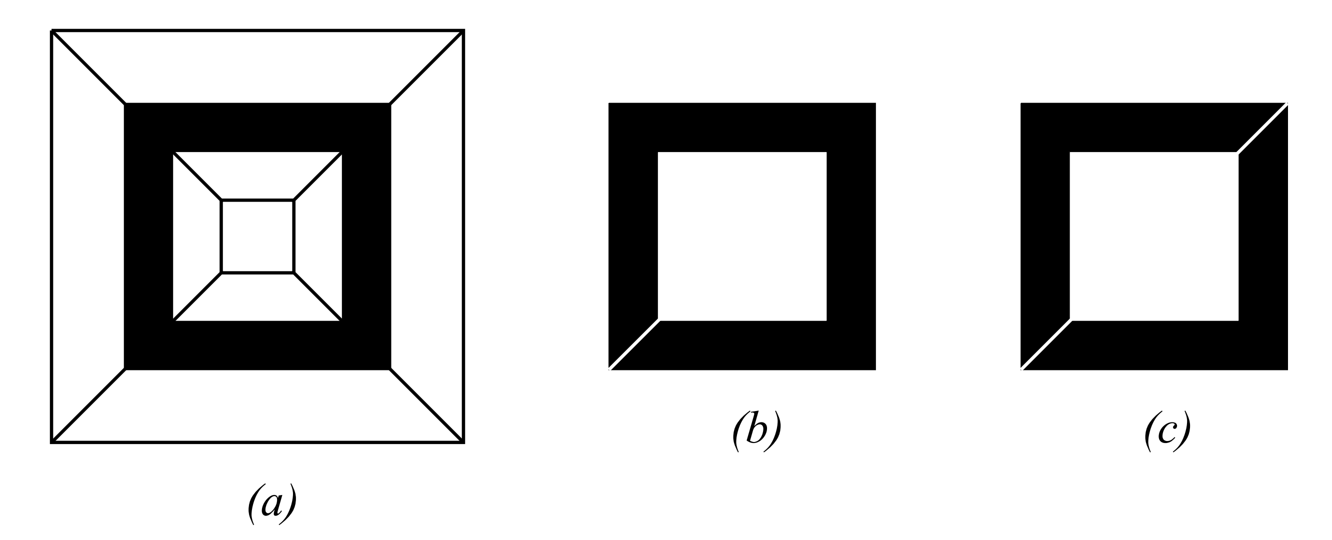


Fig. 13.

MAESTRO: Mis felicitaciones. Ciertamente, he de restringir aún más nuestra conjetura…

BETA: Ya sé lo que va a hacer usted. Va a decir usted que «*Los poliedros simples con caras triangulares son eulerianos*». Dará por supuesta la triangulación y, una vez más, convertirá el lema en una condición.

MAESTRO: No, Señor, se equivoca usted. Antes de apuntar concretamente cuál es su error, permítame extenderme un poco en mis comentarios acerca de su método de exclusión de excepciones. Cuando restringe usted su conjetura a un dominio «seguro», no examina la prueba propiamente y, de hecho, no lo necesita para sus propósitos. Para lo que se trae entre manos, le basta con el enunciado informal de que, en su dominio restringido, todos los lemas serán verdaderos, sean lo que sean. Pero a mí eso no me basta. Incorporo *a la* conjetura el mismísimo lema que ha sido refutado por el contraejemplo, de manera que tengo que identificarlo y formularlo lo más exactamente posible, basándome en un análisis cuidadoso de la prueba. De ese modo, los lemas refutados se incorporarán a mi conjetura mejorada. Su método no lo fuerza a producir una penosa *elaboración de la prueba*, puesto que la prueba no aparece en su conjetura mejorada, como ocurre con el mío. Vuelvo ahora sobre su sugerencia presente. El lema falsado por la cara en forma de anillo no es, como usted parece pensar, *«todas las caras son triangulares»,* sino *«cualquier cara bisecada por una arista diagonal se*

separa en dos trozos». Éste es el lema que convierto en una condición. Denominando a las caras que lo satisfacen «simplemente conexas», puedo ofrecer una segunda mejora de mi conjetura original: *«Para un poliedro simple con todas sus caras simplemente conexas, V - A + C = 2»*. La causa de su burdo enunciado erróneo es que su método no le enseña a practicar un cuidado análisis de la prueba. El análisis de la prueba es a veces trivial, aunque otras veces resulta realmente difícil.

BETA: Ya veo cuál es su posición. Debería añadir también una nota autocrítica a su comentario, pues me parece que revela todo un continuo de actitudes excluidoras de excepciones. La peor de ellas se limita a excluir algunas excepciones sin considerar la prueba en absoluto. De ahí la mistificación, cuando tenemos la prueba en una mano y las excepciones en la otra. Para la mentalidad de tales excluidores de excepciones primitivos, la prueba y las excepciones existen en dos compartimientos completamente separados. Otros podrán señalar ahora que la prueba funcionará tan sólo en el dominio restringido y así pretenden disipar el misterio. Sin embargo, sus «condiciones» seguirán siendo extrañas a la idea de prueba[54]. Los excluidores de excepciones aún mejores echarán un rápido vistazo a la prueba y, como me acaba de pasar a mí, obtendrán cierta inspiración para enunciar las condiciones que determinan un dominio seguro. Los mejores excluidores de excepciones practican un cuidadoso análisis de la prueba y, basándose en ello, trazan una finísima separación del área prohibida. De hecho, su método es, en este sentido un caso límite del método de exclusión de excepciones…

IOTA:… Y muestra la unidad dialéctica fundamental de la prueba y las refutaciones.

MAESTRO: Espero que ahora todos ustedes vean que las pruebas, aun cuando puedan no *demostrar*, ayudan ciertamente a *mejorar* nuestra conjetura[55]. *También la mejoran los excluidores de excepciones, pero la mejora era independiente de la demostración. Nuestro método mejora demostrando. Esta unidad intrínseca entre la «lógica del descubrimiento» y la «lógica de la justificación» constituye el aspecto más importante del método de incorporación de lemas.*

BETA: Por supuesto, ahora entiendo sus sorprendentes consideraciones anteriores, en el sentido de que no le perturbaba el hecho de que una

conjetura quedase «probada» y refutada, y su deseo de «probar» incluso una conjetura falsa.

KAPA [*aparte*]: ¿Por qué llamar «prueba» a lo que de hecho es una *«contraprueba»*?

MAESTRO: Notad que hay pocas personas dispuestas a compartir esta actitud. La mayoría de los matemáticos son incapaces de ponerse a la vez a probar *y* refutar una conjetura, debido a sus empedernidos dogmas heurísticos. *O bien* la prueban, *o bien* la refutan. Además, son especialmente incapaces de mejorar las conjeturas, refutándolas, si resulta que las conjeturas son suyas. *Quieren mejorar sus conjeturas sin refutaciones; nunca se deciden a reducir la falsedad, si no es mediante el monótono aumento de verdad; así, purgan el aumento del conocimiento del horror de los contraejemplos.* Tal vez sea éste el trasfondo del enfoque del mejor tipo de excluidores de excepciones: comienzan «jugando a la seguridad», inventando una prueba para el dominio «seguro», y *continúan* sometiéndola a una concienzuda investigación crítica, comprobando si han hecho uso de cada una de las condiciones impuestas. Si no, «agudizan» o «generalizan» la primera versión modesta de su teorema; es decir, especifican los lemas sobre los que se articula la prueba y los incorporan. Por ejemplo, tras uno o dos contraejemplos, pueden llegar a formular el *teorema excluidor de excepciones provisional:* «Todos los poliedros convexos son eulerianos», posponiendo los casos no-convexos para una *cura posterior;* a continuación, ingenian la prueba de Cauchy y, luego, al descubrir que en realidad la convexidad no se «usaba» en la prueba, construyen el teorema que incorpora el lema[56]. Nada hay heurísticamente incorrecto en este procedimiento que combina una exclusión de excepciones *provisional* con sucesivos análisis de la prueba e incorporaciones de lemas.

BETA: Por supuesto que este procedimiento no elimina la crítica, sino que tan sólo la relega al trasfondo: en vez de criticar directamente un enunciado excesivo, critica un enunciado excesivamente restringido.

MAESTRO: Estoy encantado de haberle convencido, Beta. ¿Qué piensan *ustedes,* Ro y Delta?

RO: Por mi parte, lo único que pienso es que el problema de las «caras anulares» es un pseudoproblema. Surge de una interpretación monstruosa de

lo que constituye las caras y aristas en esta soldadura de dos cubos en uno, que usted denomina «cubo con cresta».

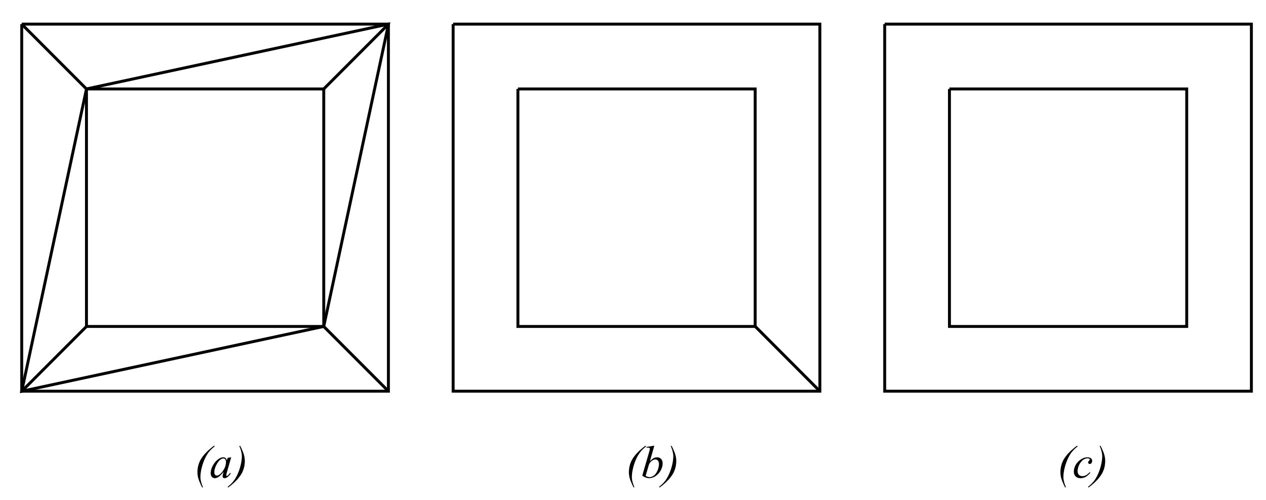


Fig. 14. Tres versiones de la cara anular: (*a*) Jonquières, (*b*) Matthiessen, (*c*) «ojos inexpertos».

MAESTRO: Explíquese.

RO: El «cubo con cresta» es un poliedro que consta de dos cubos *soldados* uno con otro. ¿Está usted de acuerdo?

MAESTRO: No tengo ningún inconveniente.

RO: Pues bien, usted ha interpretado mal la «soldadura». Esa «soldadura» consta de aristas que conectan los vértices del cuadrado de abajo del cubo pequeño a los vértices correspondientes del cuadrado superior del cubo grande. Así pues, no existe en absoluto una «cara anular».

BETA: ¡La cara anular está ahí! ¡Las aristas bisecantes de que usted habla no están ahí!

RO: Lo que pasa es que permanecen ocultas a sus ojos inexpertos[57].

BETA: ¿Supone usted que vamos a tomar en serio su argumento? ¿Lo que *yo* veo es superstición, mientras que *sus* aristas «ocultas» son la realidad?

RO: Mire este cristal de sal. ¿Diría usted que se trata de un cubo?

BETA: Ciertamente.

RO: Un cubo tiene 12 aristas, ¿no es eso?

BETA: Sí, las tiene.

RO: Sin embargo, en este cubo no hay arista ninguna; están ocultas. Tan sólo aparecen en su reconstrucción racional.

BETA: Pensaré sobre ello. Una cosa es clara, el maestro ha criticado mi arrogante opinión de que mi método llevase a la certeza, así como mi olvido de la prueba. Esas críticas se aplican tanto a mi «exclusión de monstruos» como a su «ajuste de monstruos».

MAESTRO: ¿Qué dice usted, Delta? ¿Cómo exorciza *usted* la cara anular?

DELTA: No podría, me ha convertido usted a su método. Lo único que me pregunto es por qué no se asegura usted, incorporando también el descuidado lema *tercero.* Propongo una tercera y última formulación: «Todos los poliedros son eulerianos, si (*a*) son simples, (*b*) poseen cada una de sus caras simplemente conexas y (*c*) son tales que los triángulos del entramado plano triangular, resultantes del estirado y triangulación, se pueden numerar de modo que, al eliminarlos en el orden correcto, $V - A + C$ no se altere hasta llegar al último triángulo»[58]. Me pregunto por qué no ha propuesto usted esto desde el principio. Si tomase usted realmente en serio su método, habría convertido *inmediatamente todos* los lemas en condiciones. ¿Por qué esta «ingeniería fragmentada»?[59]

ALFA: ¡Un conservador convertido en revolucionario! Su sugerencia me resulta más bien utópica, pues no hay exactamente *tres* lemas, ¿por qué no añadir, junto con muchas otras, condiciones como «(4) si 1 + 1 = 2» y «(5) si todos los triángulos tienen tres vértices y tres aristas», puesto que usamos ciertamente estos lemas? Propongo que convirtamos en condiciones sólo aquellos lemas para los que se ha hallado un contraejemplo.

GAMMA: Me parece demasiado accidental como para aceptarlo a guisa de regla metodológica. Incorporemos todos aquellos lemas contra los que podemos *esperar* contraejemplos; es decir, aquellos que no son obvia e indudablemente verdaderos.

DELTA: Bien, ¿hay alguien a quien nuestro lema tercero le parezca obvio? Convirtámoslo en una tercera condición.

GAMMA: ¿Qué pasa si las operaciones expresadas por los lemas de nuestra prueba no son todas ellas independientes? Si algunas de las operaciones se pueden llevar a cabo, puede ocurrir que el resto haya de ser *necesariamente* realizable. Por mi parte, sospecho que *si un poliedro es simple, entonces existe siempre un orden de eliminación de triángulos en el entramado plano*

resultante, tal que $V - A + C$ no se altere. Si existe, entonces la incorporación del primer lema a la conjetura nos eximirá de incorporar el tercero.

DELTA: Pretende usted que la primera condición implica la tercera. ¿Puede usted probarlo?

EPSILON: Yo puedo[60].

ALFA: Sin embargo, por interesante que sea la prueba, no nos ayudará a resolver nuestro problema: ¿hasta dónde hemos de ir en la mejora de nuestra conjetura? Puedo admitir que tenga usted la prueba pretendida, pero eso sólo descompodrá este tercer lema en algunos sublemas nuevos. ¿Deberemos convertirlos en condiciones? ¿Dónde habremos de detenernos?

KAPA: En las pruebas hay un regreso infinito; por consiguiente, las pruebas no demuestran. Debería usted constatar que probar es un juego que hay que jugar mientras divierta, deteniéndose cuando uno se cansa.

EPSILON: No, esto no es un juego, sino un asunto serio. El regreso infinito puede deternerse mediante lemas trivialmente verdaderos que no es preciso convertir en condiciones.

GAMMA: Eso es lo que yo quería decir. No convertimos en condiciones aquellos lemas que se pueden probar a partir de principios trivialmente verdaderos. Tampoco incorporamos aquellos lemas que se pueden probar a partir de lemas previamente especificados, tal vez con ayuda de tales principios trivialmente verdaderos.

ALFA: De acuerdo. Podemos, entonces, dejar de mejorar nuestra conjetura tras haber convertido en condiciones los dos lemas no triviales. De hecho, yo pienso que este método de mejora por incorporación de lemas es intachable. Me parece que no sólo mejora, sino que *torna perfecta* la conjetura. Además, me ha enseñado algo importante: es incorrecto afirmar que «el objetivo de un “problema a demostrar” es o bien mostrar concluyentemente que es verdadera determinada afirmación claramente enunciada, o bien mostrar que es falsa»[61]. El objetivo *real* de un «problema a demostrar» debería ser el de *mejorar* (de hecho, hacer perfecta) la *conjetura «ingenua»* original, para hacerla un «*teorema*» genuino.

Nuestra conjetura ingenua era «Todos los poliedros son eulerianos».

El método de exclusión de monstruos defiende esta conjetura ingenua,

reinterpretando sus términos de forma que, al final, tenemos un *teorema excluidor de monstruos:* «Todos los poliedros son eulerianos». Mas, la identidad de las expresiones lingüísticas de la conjetura ingenua y del teorema excluidor de monstruos esconde una mejora esencial, tras los subrepticios cambios en el significado de los términos.

El método de exclusión de excepciones introducía un elemento realmente extraño al argumento: la convexidad. El *teorema excluidor de excepciones* era: «Todos los poliedros convexos son eulerianos.»

El método de incorporación de lemas descansaba en el argumento, es decir, en la prueba y nada más. Virtualmente *sumaba la prueba al teorema incorporador del lema:* «Todos los poliedros con caras simplemente conexas son eulerianos.»

Esto muestra que (y ahora utilizo el término «demostración» en sentido tradicional) *uno no demuestra lo que se ha propuesto demostrar*. Por tanto, ninguna prueba debiera concluir con las palabras *«Quod erat demonstrandum»*[62].

BETA: Algunas personas dicen que los teoremas preceden a las pruebas en el orden del descubrimiento: «Hay que barruntar un teorema matemático antes de probarlo». Hay quienes lo niegan, aduciendo que el descubrimiento procede sacando conclusiones a partir de un conjunto especificado de premisas y constatando cuáles son las interesantes, si es que tenemos la suerte de hallarlas. O, para utilizar una metáfora deliciosa de un amigo mío, hay quienes dicen que la «cremallera» heurística de una estructura deductiva sube desde abajo (la conclusión) hacia arriba (las premisas)[63] mientras que otros afirman que va de arriba abajo. ¿Cuál es su posición?

ALFA: La de que su metáfora es inaplicable a la heurística. El descubrimiento ni sube ni baja, sino que sigue una trayectoria zigzagueante aguijoneado por los contraejemplos, se mueve de la conjetura ingenua a las premisas y vuelve de nuevo a eliminar la conjetura ingenua, sustituyéndola por el teorema. La conjetura ingenua y los contraejemplos no aparecen en la estructura deductiva desplegada: el zigzag del descubrimiento no se puede discernir en el producto terminado.

MAESTRO: Muy bien. Pero, permítaseme introducir una llamada de atención. El teorema no *siempre* difiere de la conjetura ingenua. Al probar, no

mejoramos necesariamente. Las pruebas mejoran cuando la idea de la prueba descubre aspectos inesperados de la conjetura ingenua que aparecen entonces en el teorema. Pero, en las teorías *maduras*, podría no ocurrir así. Es así efectivamente en el caso de teorías jóvenes *en desarrollo.* Este entretejido de descubrimiento y justificación, de mejora y prueba, es principalmente característico de las últimas.

KAPA [*aparte*]: Es posible rejuvenecer las teorías maduras. El descubrimiento siempre supera la justificación.

SIGMA: Esta clasificación corresponde a la mía. Mi primer tipo de proposiciones estaba formado por el tipo maduro; el tercero, por el tipo en desarrollo…

GAMMA [*le interrumpe*]: ¡El teorema es falso! He hallado un contraejemplo.

5. Crítica del Análisis de la Prueba mediante Contraejemplos Globales, pero no Locales. El Problema del Rigor

(a) Exclusión de monstruos en defensa del teorema

GAMMA: Acabo de descubrir que mi *Contraejemplo 5,* el cilindro, no sólo refuta la conjetura ingenua, sino también el teorema. Aunque satisface ambos lemas, no es euleriano.

ALFA: Querido Gamma, no sea usted pelma; el cilindro era un chiste, no un contraejemplo. Ningún matemático serio tomará el cilindro por un poliedro.

GAMMA: ¿Por qué no protestó usted de mi *Contraejemplo 3,* el erizo? ¿Acaso era menos «pelma» que mi cilindro?[64] *Entonces,* por supuesto, estaba usted *criticando* la conjetura ingenua y daba la bienvenida a las refutaciones. ¡*Ahora* está usted *defendiendo* el teorema y aborrece las refutaciones! *Entonces,* cuando surgía un contraejemplo, su pregunta era: *¿qué es lo que va mal con la conjetura? Ahora,* pregunta usted: *¿qué es lo que falla en el contraejemplo?*

DELTA: Pero Alfa, ¡se ha convertido usted en un excluidor de monstruos!

¿No le da vergüenza?[65]

(b) Lemas ocultos

ALFA: Lo soy; puede que me haya precipitado un poco. Déjeme pensar. Hay *tres tipos posibles de contraejemplos.* Ya hemos discutido el *primero,* que es local aunque no global; ciertamente, no refuta el teorema[66]. El *segundo,* que es tanto global como local, no requiere ninguna acción: lejos de refutar el teorema, lo confirma. Puede haber ahora un *tercer* tipo global, pero no local. Este refutaría el teorema. No pensaba que fuese posible, pero ahora Gamma pretende que el cilindro es uno de ellos. Si no queremos rechazarlo por monstruoso, hemos de admitir que es un contraejemplo global: $V - A + C = 1$. ¿Acaso no pertenece al segundo tipo inocuo? Apuesto algo a que no satisface al menos uno de los lemas.

GAMMA: Comprobémoslo. No cabe duda de que satisface el primer lema: si quitamos la cara de abajo; resulta fácil estirar el resto sobre el encerado.

ALFA: Pero si resulta que quita usted la cubierta lateral, el tinglado se descompone en dos piezas.

GAMMA: ¿Y qué? El primer lema exigía que el poliedro fuese «simple», es decir, que «tras eliminar una cara, se pudiese estirar sobre un plano». El cilindro satisface el requisito, aun cuando se empiece eliminando la cubierta lateral. Lo que usted pretende es que el cilindro satisfaga un lema *adicional;* a saber, que *el entramado plano resultante esté también conectado.* Mas, ¿quién ha enunciado nunca *este* lema?

ALFA: Todo el mundo ha interpretado «estirar» como «estirar en *una pieza*», «estirar *sin desgajar*»… Hemos decidido no incorporar el lema tercero debido a la prueba de Epsilon de que se derivaba del primero[67]. Pero, échele simplemente un vistazo a la prueba: descansa en el supuesto de que el resultado del estirado es un entramado *conexo.* De lo contrario, no tendríamos que, para el entramado triangulado, $V - A + C$ no fuese 1.

GAMMA: ¿Por qué no insistió usted en enunciarlo *explícitamente*?

ALFA: Porque considerábamos que estaba enunciado implícitamente.

GAMMA: Por lo que a usted respecta, eso no es así, ya que propuso que

«simple» equivaliese a «hinchable en un balón»[68]. El cilindro se *puede* hinchar hasta que forme un balón, por lo que, de acuerdo con *su* interpretación, se *ajusta* al primer lema.

ALFA: Bueno… Pero ha de estar usted de acuerdo con que *no* satisface el *segundo* lema, según el cual *«toda cara secada por una diagonal se descompone en dos partes»*. ¿Cómo triangulará usted el círculo o la cubierta lateral? ¿Son esas caras simplemente conexas?

GAMMA: Por supuesto que sí.

ALFA: ¡Pero, si sobre el cilindro no se pueden trazar diagonales en absoluto! Una diagonal es una arista que conecta dos vértices no adyacentes, ¡y su cilindro no tiene vértices!

GAMMA: No se altere. Si quiere usted mostrar que el círculo no es simplemente conexo, trace una diagonal que *no* cree una nueva cara.

ALFA: No se haga el gracioso; usted sabe muy bien que no puedo.

GAMMA: ¿Admitiría usted entonces que «hay una diagonal del círculo que no crea una nueva cara» es un enunciado *falso*?

ALFA: Sí, lo admitiría. ¿Qué está usted tramando ahora?

GAMMA: Entonces, ha de admitir usted que su negación es verdadera; a saber, que «todas las diagonales del círculo crean una nueva cara» o que «el círculo es simplemente conexo».

ALFA: No puede usted presentar un *caso* de su lema, según el cual «todas las diagonales del círculo crean una nueva cara»; por tanto, no es *verdadero,* sino *significativo.* Su concepción de la verdad es falsa.

KAPA [*aparte*]: ¡Primero disputaban acerca de lo que es un poliedro y ahora, acerca de lo que es la verdad![69]

GAMMA: ¡Pero, si ya admitió usted que la negación del lema era *falsa*! ¿O acaso una proposición *A* puede ser *asignificativa,* mientras que *No-A* es *significativa y falsa*? Su concepción del significado no tiene sentido.

Por favor, que conste que veo cuál es su dificultad, pero podemos superarla mediante una ligera reformulación. Llamemos simplemente conexa a una cara si *«para todo x, si x es una diagonal, entonces x corta la cara en dos»*. Ni el círculo ni la cubierta lateral del cilindro pueden tener diagonales, de modo que en su caso, sea lo que sea *x,* el antecedente será siempre falso.

Por consiguiente, el condicional será satisfecho por cualquier objeto, por lo que será significativo y verdadero. Tanto el círculo como la cubierta lateral son simplemente conexos y el cilindro satisface el segundo lema.

ALFA: ¡No! Si no puede usted trazar diagonales, triangulando así las caras, nunca llegará a un entramado triangular plano y nunca podrá concluir la prueba. ¿Cómo puede usted pretender entonces que el cilindro satisfaga el segundo lema? ¿No ve usted que *tiene que haber una cláusula existencial* en el lema? La interpretación correcta de la simple conexión de una cara ha de ser: *«para todo x, si x es una diagonal, entonces x corta la cara en dos; y existe al menos una x que es una diagonal».* Nuestra formulación original puede no haberlo expresado literalmente, pero estaba ahí como *«suposición oculta»* hecha inconscientemente[70]. Ninguna de las caras del cilindro la cumple: por consiguiente, el cilindro constituye un contraejemplo *a la vez* global y local, por lo que *no* refuta el teorema.

GAMMA: ¡Primero modificó usted el lema del estirado, introduciendo la «conexión» y ahora, el lema de la triangulación, introduciendo su cláusula existencial! Además, toda esa palabrería oscura acerca de «suposiciones ocultas» solo oculta el hecho de que mi cilindro le ha hecho a usted inventar estas modificaciones.

ALFA: ¿Qué palabrería oscura? Ya habíamos acordado omitir, esto es, «ocultar», los lemas trivialmente verdaderos[71]. ¡Por qué habríamos de enunciar e incorporar lemas trivialmente *falsos:* son igualmente triviales y aburridos! Manténgalos usted en su mente *(en thyme),* pero no los enuncie. Un lema oculto no es un error, sino una sutil abreviatura que apunta hacia nuestro conocimiento básico.

KAPA [*aparte*]: El conocimiento básico es aquello de lo que suponemos que lo sabemos todo, cuando de hecho no sabemos nada[72].

GAMMA: Si ha hecho usted suposiciones conscientes esas eran que (*a*) quitar una cara siempre deja un entramado conexo y (*b*) cualquier cara no triangular se puede cortar en triángulos, mediante diagonales. Mientras estaban en su *subconsciente*, se recogían como *trivialmente verdaderas;* con todo, el cilindro las ha hecho irrumpir en su lista *consciente* como *trivialmente falsas.* Antes de enfrentarse al cilindro, ni siquiera podía usted concebir que los dos lemas fuesen falsos. Si dice usted ahora lo contrario,

está usted reescribiendo la historia para purgarla del error[73].

ZETA: No hace mucho, Alfa, ridiculizaba usted las cláusulas «ocultas» que surgían de la definición de Delta después de cada refutación. Ahora, es usted quien aporta cláusulas «ocultas» a los lemas, tras cada refutación; es usted quien cambia de terreno y trata de ocultarlo para salvar la cara. ¿No le da vergüenza?

KAPA: Nada me divierte más que ver al dogmático como gato panza arriba. Tras revestirse con los ropajes del escéptico militante para demoler un tipo menor de dogmatismo, Alfa se pone histérico cuando, a su vez, es *él* quien se ve acorralado por el mismo tipo de argumentos escépticos. Ahora se dedica a juguetear, intentando combatir el contraejemplo de Gamma, primero, con el mecanismo de defensa que él mismo ha desenmascarado y olvidado (la exclusión de monstruos) y luego, pasando de contrabando a la prueba una reserva de «lemas ocultos» y al teorema, de «condiciones ocultas». ¿Cuál es la diferencia?

MAESTRO: El problema con Alfa era sin duda el giro dogmático en su interpretación de la incorporación de lemas. Pensaba que una cuidadosa inspección de la prueba habría de suministrar un análisis perfecto de la prueba con *todos* los temas falsos (del mismo modo que Beta pensaba que podía enumerar *todas* las excepciones). Pensaba que incorporándolos, podría obtener no sólo un teorema mejorado, sino un teorema perfecto[74], *sin necesidad de preocuparse por los contraejemplos.* El cilindro le mostró que estaba equivocado, pero, en vez de admitirlo, lo que pretende ahora es considerar completo el análisis de la prueba si contiene todos los lemas *falsos relevantes.*

(c) El método de prueba y refutaciones

GAMMA: Propongo que aceptemos el cilindro como contraejemplo genuino del teorema. Invento un nuevo lema (o lemas) que serán refutados por ese contraejemplo y añado el (los) lema(s) a la lista original. Esto, naturalmente, es exactamente lo que ha hecho Alfa, sólo que en vez de «ocultarlos» para que sean ocultos, los anuncio públicamente.

Ahora, el cilindro que constituía un contraejemplo sorprendente,

peligroso, global y no local (del tercer tipo) respecto al viejo análisis de la prueba y al correspondiente teorema, será un inocuo contraejemplo global y local (el segundo tipo) respecto al nuevo análisis de la prueba y al correspondiente teorema nuevo.

Alfa pensaba que su clasificación de contraejemplos era absoluta, aunque en realidad es relativa a su análisis de la prueba. A medida que el análisis de la prueba se desarrolla, los contraejemplos del tercer tipo se tornan en contraejemplos del segundo.

LAMBDA: Está bien eso. Un análisis de la prueba es «riguroso» o «válido» y el correspondiente teorema matemático es verdadero si, y sólo si, no tiene contraejemplos del «tercer tipo». Llamo a este criterio el *Principio de la Retransmisión de la Falsedad,* ya que exige que los contraejemplos globales sean también locales: la falsedad debería retransmitirse de la conjetura ingenua a los lemas, del consecuente del teorema a su antecedente. Si un contraejemplo global pero no local viola este principio, lo restauramos añadiendo un lema conveniente al análisis de la prueba. El Principio de la Retransmisión de la Falsedad es, por tanto, un *principio regulativo* del análisis de la prueba *in statu nascendi*, mientras que un contraejemplo global aunque no local es un catalizador del desarrollo del análisis de la prueba.

GAMMA: Recuerde que, incluso antes de hallar una sola refutación, nos las arreglaremos para señalar tres lemas sospechosos, siguiendo adelante con el análisis de la prueba.

LAMBDA: Eso es verdad. El análisis de la prueba puede comenzar no solo bajo la presión de contraejemplos globales, sino también cuando la gente ha aprendido ya a estar en guardia contra pruebas «convincentes»[75].

En el *primer caso,* todos los contraejemplos globales aparecen como contraejemplos del tercer tipo y todos los lemas inician su carrera como «lemas ocultos». Nos llevan a una construcción gradual del análisis de la prueba y así, se tornan uno por uno en contraejemplos del segundo tipo.

En el *segundo caso,* cuando ya estamos en plan suspicaz y buscamos refutaciones, podemos llegar a un análisis de la prueba avanzado sin ningún contraejemplo. Hay entonces dos posibilidades. La *primera posibilidad* es que *tengamos éxito* con la refutación (mediante contraejemplos locales) de los lemas reseñados en nuestro análisis de la prueba. Podemos perfectamente

descubrir que son también contraejemplos globales.

ALFA: Así es como descubrí el marco de cuadro: buscando un poliedro que, tras haberle sido eliminada una cara, no pudiese ser estirado sobre un plano.

SIGMA: Entonces, no sólo actúan las refutaciones como fermento del análisis de la prueba, sino que éste puede actuar como fermento de las refutaciones. ¡Qué alianza satánica entre supuestos enemigos!

LAMBDA: Exacto. Si una conjetura parece muy plausible o incluso autoevidente, debería probarse: puede que se descubra que descansa en lemas muy sofisticados y dudosos. La refutación de los lemas puede conducir a alguna refutación inesperada de la conjetura original.

SIGMA: ¡A refutaciones generadas por la prueba!

GAMMA: Entonces, «la virtud de una prueba lógica no es que fuerce la creencia, sino que sugiere dudas»[76].

LAMBDA: Pero, déjenme volver sobre la *segunda posibilidad,* cuando *no* hallamos contraejemplos locales de los lemas sospechosos.

SIGMA: Es decir, cuando las refutaciones no asisten al análisis de la prueba, ¿qué habría de ocurrir entonces?

LAMBDA: Seríamos tildados de excéntricos. La prueba habría de adquirir absoluta respetabilidad y los lemas habrían de eliminar toda sospecha. Nuestro análisis de la prueba sería olvidado pronto[77]. Sin refutaciones no se pueden sostener las sospechas: el reflector de la sospecha pronto se extingue si no lo refuerza un contraejemplo, dirigiendo el chorro de luz de la refutación hacia un aspecto olvidado de la prueba que apenas ha recibido atención en la penumbra de la «verdad trivial».

Todo ello muestra que no se puede poner la prueba y las refutaciones en compartimientos separados. Por eso, yo propondría rebautizar nuestro *«método de incorporación de lemas»* como el *«método de prueba y refutaciones».* Permítaseme enunciar sus aspectos principales en tres reglas heurísticas.

Regla 1. Si dispone usted de una conjetura, propóngase probarla y refutarla. Inspeccione cuidadosamente la prueba para preparar una

lista de lemas no triviales (análisis de la prueba); halle contraejemplos tanto de la conjetura (contraejemplos globales) como de los lemas sospechosos (contraejemplos locales).

Regla 2. Si tiene usted un contraejemplo global, descarte su conjetura, añada a su análisis de la prueba un lema conveniente que sea refutado por el contraejemplo y sustituya la conjetura descartada por otra mejorada que incorpore ese lema como condición[78]*. No permita que una refutación sea descartada por monstruosa*[79]*. Trate de hacer explícitos todos sus «lemas ocultos»*[80]*.*

Regla 3. Si tiene usted un contraejemplo local, compruebe a ver si no es también global. Si lo es, puede usted aplicar fácilmente la Regla 2.

(d) Prueba frente a análisis de la prueba. Relativización de los conceptos de teorema y rigor en el análisis de la prueba.

ALFA: ¿Qué quiere usted decir con «conveniente» en su *Regla 2*?

GAMMA: Es completamente redundante. Se puede añadir *cualquier* lema que sea refutado por el contraejemplo en cuestión, pues *cualquier* lema tal restaurará la validez del análisis de la prueba.

LAMBDA: ¿Qué? Así que un lema del tipo: «Todos los poliedros tienen al menos 17 aristas» habría de ocuparse del cilindro. Cualquier otra conjetura aleatoria y *ad hoc* valdría lo mismo, siempre y cuando quedase refutada por el contraejemplo.

GAMMA: ¿Por qué no?

LAMBDA: Ya hemos criticado a los excluidores de monstruos y de excepciones por olvidarse de las pruebas[81]. Ahora está usted haciendo lo mismo, inventando un monstruo real: *¡análisis de la prueba sin prueba!* La única diferencia que hay entre usted y el excluidor de monstruos es que usted haría que Delta explicitase sus definiciones arbitrarias y las incorporase al teorema como lemas. Además, *no* hay diferencia entre la exclusión de excepciones y su modo de analizar la prueba. La única salvaguardia contra tales métodos *ad hoc* es utilizar lemas *convenientes;* es decir, lemas en concordancia con el espíritu del experimento mental. ¿O, acaso eliminaría

usted la belleza de las pruebas de la matemática, sustituyéndola por un tonto juego formal?

GAMMA: ¡Es preferible a su «espíritu del experimento mental»! Yo defiendo la objetividad de las matemáticas contra su psicologismo.

ALFA: Gracias Lambda, acaba usted de plantear de nuevo mi caso: no se *inventa* un lema nuevo a partir de la nada para enfrentarse a un contraejemplo global aunque no local; lo que ocurre más bien es que se examina la prueba con creciente cuidado y se *descubre* allí el lema. Así, querido Zeta, yo no he «apañado» lemas ocultos ni, querido Kapa, los he «pasado de contrabando» a la prueba. La prueba los contiene a todos, solo que un matemático maduro comprende la prueba completa a partir de un breve bosquejo. No habría que confundir *prueba infalible* con *análisis inexacto de la prueba*. Aún tenemos ahí el irrefutable teorema maestro: «Todos los poliedros con los que se puede realizar el experimento mental o, dicho sea brevemente, *todos los poliedros de Cauchy son eulerianos*». Mi aproximado analista de la prueba trazó el límite de la clase de los poliedros de Cauchy con un lápiz que, he de admitir, no estaba especialmente afilado. Ahora, los contraejemplos excéntricos nos enseñan a afilar nuestro lápiz. Pero, en primer lugar: *no hay lápiz absolutamente afilado* (y si nos pasamos al afilarlo, se romperá); y, en segundo lugar, *afilar lápices no es hacer matemáticas creativas.*

GAMMA: Estoy perdido. ¿Cuál *es* su postura? Antes era usted el campeón de las refutaciones.

ALFA: ¡Oh, se trata de las dificultades del crecimiento! La intuición madura barre a un lado la controversia.

GAMMA: Su primera intuición madura le llevó a su «análisis perfecto de la prueba». Usted pensaba que su «lápiz» era absolutamente agudo.

ALFA: Me olvidé de las dificultades de la comunicación lingüística, especialmente con pedantes y escépticos. Pero el meollo de las matemáticas es el experimento mental, la prueba. Su articulación lingüística (el análisis de la prueba), aunque necesaria para la comunicación, es irrelevante. Yo estoy interesado en los poliedros y usted en el lenguaje. ¿No ve usted la pobreza de sus contraejemplos? Son lingüísticos y no poliédricos.

GAMMA: ¿Así pues, la refutación de un teorema sólo descubre nuestro fallo a la hora de captar los lemas ocultos que encierra? ¿Por tanto, un

«teorema» carece de significado a menos que comprendamos su prueba?

ALFA: Puesto que la vaguedad del lenguaje hace inalcanzable el *rigor del análisis de la prueba* y convierte la formación del teorema en un proceso sin fin, ¿por qué preocuparse por el teorema? Los matemáticos practicantes, desde luego que no se preocupan. Si surge otro «contraejemplo» insignificante más, no admiten que su teorema quede refutado, sino, a lo sumo que su «dominio de validez» deberá ser convenientemente restringido.

LAMBDA: ¿Así pues, no está usted interesado ni en los contraejemplos ni en el análisis de la prueba ni en la incorporación de lemas?

ALFA: Exacto; rechazo todas sus reglas. Propongo a cambio una sola regla: *Construya pruebas rigurosas (transparentes).*

LAMBDA: Arguye usted que el *rigor en el análisis de la prueba* es inalcanzable. ¿Acaso es alcanzable *el rigor de la prueba*? ¿Acaso los experimentos mentales «transparentes» no pueden llevar a resultados paradójicos y aun contradictorios?

ALFA: El lenguaje es vago, si bien el pensamiento puede lograr un absoluto rigor.

LAMBDA: Pero, sin duda «en cada etapa de la evolución, nuestros padres también pensaban que lo habían alcanzado. Si ellos se engañaron, ¿no nos engañamos también nosotros?»[82]

ALFA: «Hoy se alcanza el rigor absoluto»[83].

[*Risitas en la clase*[84].]

GAMMA: ¡Esa teoría de la prueba «transparente» es burdo psicologismo![85]

ALFA: ¡Pero es preferible a la pedantería lógico-lingüística de su análisis de la prueba![86]

LAMBDA: Juramentos aparte, yo también soy escéptico acerca de su concepción de las matemáticas como «actividad esencialmente alingüística de la mente»[87]. ¿Cómo puede ser verdadera o falsa una actividad? Sólo el pensamiento *articulado puede tratar de alcanzar la verdad. La prueba no basta; hemos de establecer también qué es lo que la prueba ha probado. La prueba es sólo un estadio del trabajo del matemático que ha de ser seguida por el análisis de la prueba y las refutaciones, para concluir con el teorema*

riguroso. Hemos de combinar el «rigor de la prueba» con el «rigor del análisis de la prueba».

ALFA: ¿Sigue usted esperando llegar al final a un análisis de la prueba perfectamente riguroso? Si es así, dígame por qué no comenzó usted formulando su nuevo teorema «estimulado» por el cilindro. Sólo lo indicó. Su longitud y chapucería nos hubiera hecho reír desesperadamente. ¡Y eso, sólo tras el *primero* de sus nuevos contraejemplos! Usted sustituyó nuestro teorema original por una sucesión de teoremas cada vez más precisos; pero sólo *en teoría*. ¿Qué pasa con la *práctica* de esta relativización? Contraejemplos más excéntricos aún serán contrarrestados por lemas aún más triviales, produciendo una «viciosa infinitud»[88] de teoremas cada vez más largos y chapuceros[89]. Cuando parecía conducir a la verdad, la crítica se consideraba vigorizante; pero resulta ciertamente frustrante cuando destruye cualquier verdad y nos conduce indefinidamente sin propósito alguno. Yo detengo esta infinitud viciosa en el *pensamiento*, mientras que usted nunca la detendrá en el *lenguaje*.

GAMMA: Yo nunca he dicho que tenga que haber un número *infinito* de contraejemplos. En determinado punto podemos alcanzar la verdad, con lo que se detendrá el flujo de refutaciones. Pero, como es natural, no sabremos cuándo. Sólo las refutaciones son concluyentes; las pruebas son una cuestión psicológica[90].

LAMBDA: Yo aún confío en que la luz de la certeza absoluta brille cuando se agoten las refutaciones.

KAPA: Pero, ¿se agotarán? ¿Qué pasaría si Dios hubiese creado los poliedros de modo que todos los enunciados universales y verdaderos acerca de ellos (formulados en lenguaje humano) fuesen infinitamente largos? ¿Acaso no constituye un antropomorfismo blasfemo suponer que los (divinos) teoremas verdaderos son de longitud finita?

Seamos francos: por una u otra razón, están ustedes cansados de las refutaciones y de la formación fragmentada del teorema. ¿Por qué no decidir que ya hemos hecho bastante y detenemos el juego? Ya hemos abandonado el *«Quod erat demonstrandum»;* ¿por qué no abandonar también el *«Quod erat demonstratum»*? La verdad es cosa sólo de Dios.

ZETA [*aparte*]: ¡El escéptico religioso es el peor enemigo de la ciencia!

SIGMA: No dramaticemos más de la cuenta. Después de todo, lo único que está en entredicho es una estrecha penumbra de vaguedad. Lo único que ocurre, como ya he dicho, es que *no todas las proposiciones son verdaderas o falsas.* Hay una tercera clase que denominaría ahora *«más o menos rigurosas».*

ZETA [*aparte*]: ¡Lógica trivalente: el fin de la racionalidad crítica!

SIGMA:… y establecemos su dominio de validez con un rigor que es más o menos adecuado.

ALFA: ¿Adecuado para qué?

SIGMA: Adecuado para la solución del problema que queremos resolver.

ZETA [*aparte*]: ¡Pragmatismo! ¿Todo el mundo ha perdido el interés por la *verdad*?

KAPA: ¡O adecuado para el *Zeitgeist*! «Suficiente en el día es su rigor»[91].

ZETA: ¡Historicismo! [*Se desmaya.*]

ALFA: Las reglas de Lambda para el *«análisis riguroso de la prueba»* privan a las matemáticas de su belleza y nos presentan la bizantina pedantería de los largos y engorrosos teoremas que llenan libros pesados y gruesos y que pueden terminar arrojándonos a una infinitud viciosa. La vía de escape de Kapa es la convención, la de Sigma, el pragmatismo matemático. ¡Menuda elección para un racionalista!

GAMMA: ¿Así que un racionalista debería saborear las *«pruebas rigurosas»* de Alfa, la intuición inarticulada, los «lemas ocultos» la mofa del Principio de la Retransmisión de la Falsedad y la eliminación de las refutaciones? ¿Acaso las matemáticas no tienen que tener ninguna relación con la crítica y la lógica?

BETA: Sea lo que sea, ya estoy harto de estas sutilezas verbales inconcluyentes. Lo que quiero es hacer matemáticas y no estoy interesado en las dificultades filosóficas de la justificación de sus fundamentos. Aun cuando la razón fracase en suministrar tal justificación, mi instinto natural me tranquiliza[92].

Tengo entendido que Omega tiene una interesante colección de pruebas alternativas y preferiría escucharle.

OMEGA: ¡Pero las pondré en un marco «filosófico»!

BETA: No me importa hacer un paquete, si hay algo más en el paquete.

Nota. En esta sección he intentado mostrar cómo la emergencia de la crítica matemática ha sido la fuerza conductora de la búsqueda de «fundamentos» en las matemáticas.

La distinción que establecemos entre *prueba* y *análisis de la prueba,* así como la distinción correspondiente entre *rigor de la prueba* y *rigor del análisis de la prueba,* parece ser crucial. Hacia 1800, el *rigor de la prueba* (construcción o experimento transparente) se contraponía al argumento confuso y a la generalización inductiva. Eso era lo que Euler entendía por *«rigida demostratio»,* y la idea kantiana de las matemáticas infalibles también estaba basada en esta concepción (véase su ejemplo paradigmático de prueba matemática en su [1781], págs. 716-17). También se pensaba que uno demuestra lo que se ha propuesto demostrar. A nadie se le ocurría que la articulación verbal de un experimento mental entrañase alguna dificultad real. La lógica formal aristotélica y las matemáticas eran dos disciplinas totalmente separadas: los matemáticos consideraban que aquélla era claramente inútil. La prueba del experimento mental suministraba convicción plena sin ningún patrón deductivo o estructura «lógica».

A comienzos del siglo diecinueve, la oleada de contraejemplos trajo la confusión. Puesto que las pruebas eran transparentes, las refutaciones tenían que ser extravagancias milagrosas que habían de ser completamente segregadas de las pruebas indubitables. *La revolución del rigor de Cauchy* descansaba sobre la innovación heurística de que el matemático no debiera detenerse en la prueba: debería proseguir y hallar qué es lo que había probado, enumerando las excepciones o, más bien, enunciando un dominio seguro donde la prueba es válida. *Pero, ni Cauchy ni Abel vieron ninguna conexión entre ambos problemas. Nunca se les ocurrió que si descubrían una excepción, deberían echar otro vistazo a la prueba.* (Otros practicaban la exclusión de monstruos, el ajuste de monstruos o incluso «hacían la vista gorda»; pero todos estaban de acuerdo en que la prueba era tabú y en que no tenía nada que ver con las «excepciones».)

La unión, durante el diecinueve, de la lógica y las matemáticas tuvo dos

fuentes principales: la geometría No-Euclidea y la *revolución del rigor de Weierstrass.* Ambas produjeron la integración de la prueba (experimento mental) y las refutaciones, y comenzaron a desarrollar *el análisis de la prueba,* introduciendo gradualmente patrones deductivos en la prueba-experimento-mental. Lo que denominamos «método de prueba y refutaciones» constituyó su innovación heurística: *unió la lógica y la matemática por vez primera.* El rigor de Weierstrass triunfó sobre sus reaccionarios oponentes, excluidores de monstruos y ocultadores de lemas, los cuales utilizaban slogans del tipo «la estupidez del rigor», «artificialidad frente a belleza», etc. *El rigor del análisis de la prueba superó al rigor de la prueba,* aunque la mayoría de los matemáticos soportaban pacientemente su pedantería tan sólo en la medida en que les prometía una certeza completa.

La teoría de conjuntos de Cantor (con otra hornada más de refutaciones inesperadas de teoremas «rigurosos») convirtió en dogmáticos una gran parte de la vieja guardia de Weierstrass, siempre dispuestos a combatir a los «anarquistas», excluyendo los nuevos monstruos o aludiendo a «lemas ocultos» en sus teoremas que representaban «el último grito en rigor», mientras continuaban flagelando como «reaccionarios» a los de viejo cuño por pecados similares.

Algunos matemáticos se dieron cuenta entonces de que la tendencia al rigor del análisis de la prueba, en el método de pruebas y refutaciones, llevaba a una infinitud viciosa. Entonces, comenzó una contrarrevolución «intuicionista»: la frustrante pedantería lógico-lingüística del *análisis de la prueba* fue condenada y se inventaron para las *pruebas* nuevas normas de rigor extremistas; una vez más, las matemáticas y la lógica se divorciaron.

Los logicistas trataron de salvar al matrimonio y naufragaron en las paradojas. El rigor de Hilbert convirtió las matemáticas en una telaraña de *análisis de la prueba* y pretendía detener su regreso infinito mediante transparentes *pruebas* de consistencia de su metateoría intuicionista. El «substrato fundacional», la región de incriticable familiaridad, se desplazó a los experimentos mentales de las matemáticas. (Cf. Lakatos [1962], págs. 179-84.)

Gracias a cada una de las «revoluciones del rigor», el análisis de la prueba penetró con mayor profundidad en las pruebas, hasta el *substrato*

fundacional del «conocimiento básico familiar» (cf. también la nota 63), donde la intuición transparente, el rigor de la prueba, reinaba absolutamente y donde la crítica estaba excluida. Así, *los diversos niveles de rigor difieren tan sólo acerca de dónde trazar la línea divisoria entre el rigor del análisis de la prueba y el rigor de la prueba;* es decir, *acerca de dónde debiera detenerse la crítica y comentar la justificación.* «La certeza nunca se alcanza»; «los fundamentos» nunca se hallan, aunque la «astucia de la razón» convierte cada aumento de *rigor* en un aumento de *contenido,* del alcance de las matemáticas. Pero esta historia va más allá de nuestra presente investigación[93].

6. Vuelta a la Crítica de la Prueba mediante Contraejemplos Locales pero no Globales. El Problema del Contenido

(a) Aumento del contenido mediante pruebas más profundas

OMEGA: Me gusta el método de prueba y refutaciones de Lambda y comparto su fe en que de algún modo llegaremos finalmente a un análisis riguroso de la prueba y, por tanto, a un teorema ciertamente verdadero. Pero, aun así, nuestro propio método crea un nuevo problema: *el análisis de la prueba, al aumentar la certeza, disminuye el contenido.* Cada nuevo lema en el análisis de la prueba, cada nueva condición correspondiente en el teorema, reduce su dominio. El aumento del rigor se aplica a un número decreciente de poliedros. ¿Acaso la incorporación de lemas no está repitiendo el error cometido por Beta al jugar a lo seguro? ¿No podríamos también nosotros «habernos retirado demasiado radicalmente», dejando fuera de las murallas cientos de poliedros eulerianos?[94] En ambos casos, podríamos estar tirando el bebé junto con el agua en que lo hemos bañado. *Deberíamos poseer un contrapeso frente a la presión que hace el rigor hacia la disminución del contenido.*

Ya hemos dado unos cuantos pasos en esta dirección. Permítaseme recordar un par de casos para reexaminarlos.

El primero de ellos se refiere a cuando nos encontramos por vez primera

con contraejemplos locales aunque no globales[95]. Gamma refutó el lema tercero de nuestro primer análisis de la prueba (que «al eliminar triángulos del entramado triangulado, sólo tenemos dos posibilidades: o eliminamos una arista o eliminamos dos aristas y un vértice»). Él eliminó un triángulo del centro del entramado sin eliminar una sola arista o un solo vértice.

Teníamos entonces dos posibilidades[96]. La *primera* consistía en incorporar al teorema el lema falso. Ese procedimiento hubiese sido perfectamente adecuado por lo que respecta a la certeza, pero habría reducido el dominio del teorema tan drásticamente que se habría aplicado tan sólo al tetraedro. Junto con los contraejemplos, habríamos arrojado todos los ejemplos, excepto uno.

Esta era la razón de que adoptásemos la alternativa: en vez de *estrechar* el dominio del teorema por incorporación de lemas, lo *ampliamos* sustituyendo el lema falsado por otro sin falsar. Con todo, este patrón vital de formación de teoremas se olvidó enseguida y Lambda no se preocupó de formularlo como regla heurística. Debería ser:

> *Regla 4. Si se tiene un contraejemplo local aunque no global, trátese de mejorar el análisis de la prueba sustituyendo el lema refutado por otro no falsado.*

Los contraejemplos del primer tipo (locales pero no globales) pueden suministrar una oportunidad de *aumentar* el contenido de nuestro teorema que está siendo continuamente *reducido* bajo la presión de contraejemplos del tercer tipo (globales, aunque no locales).

GAMMA: La *Regla 4* muestra de nuevo la debilidad de la «intuición del análisis perfecto de la prueba» de Alfa, ya descartada[97]. Él habría enumerado los lemas sospechosos, los habría incorporado inmediatamente y, sin cuidarse de los contraejemplos, habría formado teoremas casi vacíos.

MAESTRO: Oigamos el segundo ejemplo que nos ha prometido.

OMEGA: En el análisis de la prueba de Beta, el segundo lema era *«todas las caras son triangulares»*[98]. Eso se puede falsar mediante toda una serie de contraejemplos locales aunque no globales; por ejemplo, por el cubo o el

dodecaedro. Por tanto, Señor, sustitúyalo usted por un lema que no quede falsado por ellos; a saber, que *«cualquier cara partida por una arista diagonal se descompone en dos partes»*. Mas, en lugar de invocar la *Regla 4,* increpó usted a Beta por hacer un «análisis descuidado de la prueba». Admitirá usted que la *Regla 4* representa una recomendación mejor que el mero «sea usted más cuidadoso».

BETA: Está usted en lo cierto, Gamma, y me ha hecho usted comprender mejor «el método del mejor tipo de excluidores de excepciones»[99]. Comienzan con un precavido y «seguro» análisis de la prueba y, al aplicar sistemáticamente la *Regla 4,* construyen gradualmente el teorema sin expresar una falsedad. Después de todo, es una cuestión temperamental que nos acerquemos a la verdad a través de enunciados excesivos siempre falsos o a través de enunciados excesivamente restringidos, siempre verdaderos.

OMEGA: Puede que sea cierto, pero se puede entender de dos maneras la *Regla 4.* Hasta ahora sólo hemos tomado en consideración la primera interpretación más débil: «se elabora y mejora *fácilmente* la prueba, sustituyendo el lema falso por otro *ligeramente modificado* que no habrá de refutar el contraejemplo»[100], lo único que se precisa para esto es una inspección «más cuidadosa» de la prueba y una «mínima observación»[101]. Con esta interpretación, la *Regla 4* no es más que un parche local *en el marco de la prueba original.*

Pero, también se puede dar una interpretación alternativa radical: sustituir el lema, o tal vez todos los lemas, no sólo tratando de exprimir hasta la última gota de contenido de la prueba dada, sino tal vez también inventando una prueba *más profunda,* de mayor alcance y totalmente distinta.

MAESTRO: ¿Por ejemplo?

OMEGA: He discutido antes la conjetura de Descartes-Euler con un amigo, quien ofreció inmediatamente una prueba como la que sigue: imaginemos que el poliedro está hueco, con una superficie hecha de material rígido, digamos, de cartón. Las aristas deben estar claramente pintadas por la parte interior. Hagamos que el interior esté bien iluminado y sea una de las caras la lente de una cámara ordinaria; desde esa cara se puede tomar una instantánea que muestre todos los vértices y aristas.

SIGMA [*aparte*]: ¿Una cámara en una prueba matemática?

OMEGA: De este modo, obtengo una foto de un entramado plano que se puede manejar exactamente como el entramado plano de su prueba. Del mismo modo, puedo mostrar que, si las caras son simplemente conexas, $V - A + C = 1$, y añadiendo la cara-lente, invisible en la foto, obtengo la fórmula de Euler. El lema principal es que hay una cara del poliedro que, si se transforma en una lente de una cámara, fotografía el interior del poliedro de modo que todas las aristas y todos los vértices queden en la película. Introduzco ahora la siguiente abreviatura: en lugar de decir «un poliedro que tiene al menos una cara desde la que se puede fotografiar *todo* el interior», diré «un poliedro cuasi convexo».

BETA: Así, su teorema será: Todos los poliedros cuasi convexos con caras simplemente conexas son eulerianos.

OMEGA: En aras de la brevedad y para rendir homenaje al inventor de esta idea de prueba particular, diría más bien: *«Todos los poliedros de Gergonne son eulerianos»*[102].

GAMMA: Sin embargo, hay muchos poliedros simples que, aunque perfectamente eulerianos, están tan endiabladamente indentados que no tienen ninguna cara desde la que se pueda fotografiar todo el interior. La prueba de Gergonne no es más profunda que la de Cauchy; es la de Cauchy la que es más profunda que la de Gergonne.

OMEGA: ¡Por supuesto! Supongo que el Maestro conocía la prueba de Gergonne, descubrió que era insatisfactoria mediante algún contraejemplo local y no global, y sustituyó el lema óptico, fotográfico, por el lema del estirado, topológicamente más amplio. De ahí, llegó a la prueba *más profunda* de Cauchy y no mediante un «análisis cuidadoso de la prueba» seguido de una ligera alteración, sino mediante una innovación imaginativa radical.

MAESTRO: Acepto su ejemplo; pero no conocía la prueba de Gergonne. Mas, si usted la conocía, ¿por qué no nos habló de ella?

OMEGA: Porque la refuté inmediatamente mediante poliedros eulerianos que no son de Gergonne.

GAMMA: Como acabo de decir, también yo he hallado tales poliedros. ¿Pero, acaso es eso una razón para tachar simplemente la prueba?

OMEGA: Eso creo.

MAESTRO: ¿Ha oído usted hablar de la prueba de Legendre? ¿También la tacharía usted?

OMEGA: Por supuesto que sí. Es aún menos satisfactoria: su contenido es aún más pobre que el de la prueba de Gergonne. Su experimento mental comenzaba haciendo un mapa del poliedro mediante una proyección central sobre un esfera que contenga al poliedro. Supuso que el radio de la esfera fuese 1. Eligió el centro de proyección de modo que la esfera estuviese cubierta totalmente una vez, pero sólo una vez, por un entramado de polígonos esféricos. Así, su primer lema afirmaba la existencia de tal punto. Su segundo lema afirmaba que para el entramado poliédrico de la estera, $V - A + C = 2$, si bien logró descomponerlo en lemas trivialmente verdaderos de trigonometría esférica. Ahora bien, un punto desde el que sea posible semejante proyección central sólo existe en poliedros convexos y en unos pocos poliedros «cuasiconvexos» decentes; una clase más restringida incluso que los poliedros «cuasiconvexos». Pero este teorema: *«Todos los poliedros de Legendre son eulerianos»*[103] difiere *completamente* del de Cauchy, aunque para peor. Es «desafortunadamente incompleto»[104]. Representa un «esfuerzo vano que presupone condiciones de las que no depende en absoluto el teorema de Euler. Ha de ser eliminado y es necesario buscar principios más generales»[105].

BETA: Omega está en lo cierto. «La convexidad es en cierta medida accidental para el carácter euleriano. Un poliedro convexo podría transformarse, por ejemplo, mediante una indentación o hundiendo uno o más de sus vértices, en un poliedro no convexo con los mismos números configuradores. La relación de Euler corresponde a algo más profundo que la convexidad»[106]. Así que usted nunca lo captará con sus «cuasi» tal y cual.

OMEGA: Pensaba que el Maestro lo había captado con los principios topológicos de la prueba de Cauchy, en la que *todos* los lemas de la prueba de Legendre se sustituyen por otros completamente nuevos. Pero entonces di con un poliedro que refutaba incluso esta prueba, la más profunda hasta el momento.

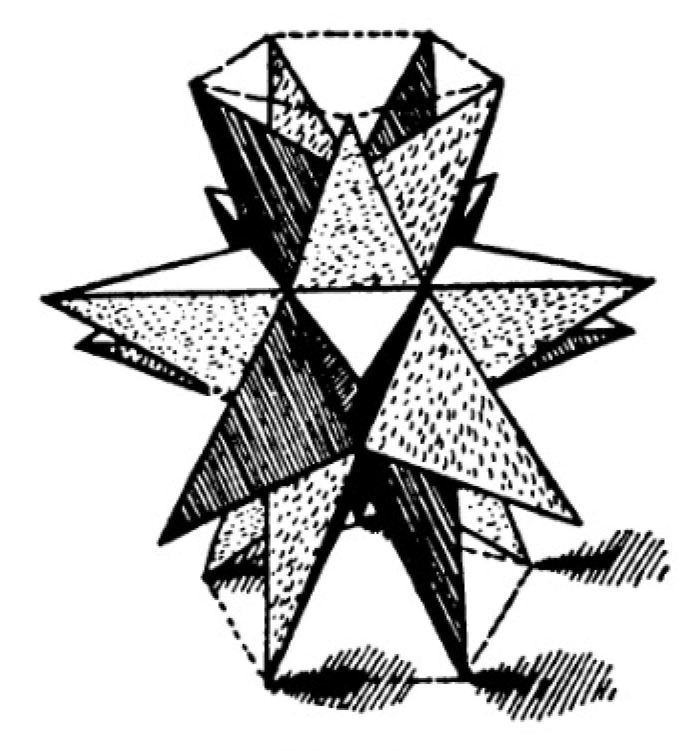


Fig. 15.

MAESTRO: Infórmenos de eso.

OMEGA: Todos ustedes recuerdan el «erizo» de Gamma (fig. 7). Por supuesto, no era euleriano. ¡Pero no todos los poliedros estrellados son no-eulerianos! Tomemos, por ejemplo, el «gran dodecaedro estrellado» (fig. 15). Como el «dodecaedro estrellado pequeño», consta de pentagramas, aunque dispuestos de modo diferente. Posee 12 caras, 30 aristas y 20 vértices, de manera que $V - A + C = 2$[107].

MAESTRO: ¿Rechaza usted entonces nuestra prueba?

OMEGA: En efecto. La prueba satisfactoria ha de explicar también el eulerianismo del «gran dodecaedro estrellado».

RO: ¿Por qué no admitir que su «gran dodecaedro estrellado» es triangular? Sus dificultades son imaginarias.

DELTA: Estoy de acuerdo. Pero son imaginarias por una razón diferente. Ahora ya me he entregado a los poliedros estrellados: son fascinantes. Pero, me temo que sean esencialmente diferentes de los poliedros ordinarios. Por tanto, no es posible concebir una prueba que explique el carácter euleriano

de, digamos, el cubo *y* del «gran dodecaedro estrellado» mediante una sola idea.

OMEGA: ¿Por qué no? No tiene usted imaginación. ¿Habría insistido usted tras la prueba de Gergonne y antes de la de Cauchy en que los poliedros cóncavos y convexos son esencialmente diferentes y en que, por tanto, no era posible concebir una prueba que explicase el carácter euleriano de los poliedros convexos y cóncavos mediante una única idea? Permítame citar los *Diálogos* de Galileo:

> SAGREDO: Así, como usted ve, todos los planetas y satélites (llamémoslos a todos «planetas») se mueven en elipses.
>
> SALVIATI: Me temo que sean planetas moviéndose en parábolas. Mire esta piedra. La arrojo y se mueve en una parábola.
>
> SIMPLICIO: ¡Pero esa piedra no es un planeta! Se trata de dos fenómenos totalmente diferentes.
>
> SALVIATI: Por supuesto que esta piedra es un planeta, sólo que lanzada con una mano menos poderosa que la que arrojó la Luna.
>
> SIMPLICIO: ¡Tonterías! ¿Cómo se atreve usted a poner en pie de igualdad fenómenos celestes y terrestres? ¡Uno nada tiene que ver con el otro! Por supuesto que ambos se pueden explicar mediante pruebas, pero estoy completamente seguro de que ambas explicaciones serán distintas. ¡No puedo imaginar que una prueba explique el curso celeste de un planeta y un proyectil terrestre con una única idea!
>
> SALVIATI: Usted no podrá imaginarlo, pero yo puedo ingeniarlo… [108]

MAESTRO: No se preocupe de los proyectiles y los planetas, Omega, ¿acaso ha conseguido usted hallar una prueba que abarque los poliedros eulerianos ordinarios y los poliedros estrellados eulerianos?

OMEGA: No; pero lo conseguiré[109].

LAMBDA: Eso dice usted, pero ¿qué pasa con la prueba de Cauchy? Ha de explicarnos por qué rechaza una prueba tras otra.

(b) La tendencia hacia pruebas finales y las correspondientes condiciones necesarias y suficientes

OMEGA: Ha criticado usted los análisis de la prueba por el hundimiento de la *retransmisión de la falsedad* mediante contraejemplos del *tercer* tipo[110]. Yo los critico ahora por el hundimiento de la *transmisión* de la falsedad (o, lo que viene a ser lo mismo, la *retransmisión de la verdad*), mediante contraejemplos del *segundo* tipo[111]. Una prueba debe explicar el fenómeno de la eulerianidad en todo su ámbito.

Mi alegato no es sólo en favor de la *certeza*, sino también en la *finalidad*. El teorema ha de ser cierto, no ha de haber contraejemplos *en* sus dominios, pero ha de ser también *final*: no debe haber ningún ejemplo *fuera de* sus dominios. Lo que quiero es trazar una línea divisoria entre ejemplos y contraejemplos y no simplemente entre el dominio seguro de unos cuantos ejemplos por un lado, y una mezcla de ejemplos y contraejemplos, por el otro.

LAMBDA: O sea, usted quiere que las condiciones del teorema sean no sólo suficientes, sino también necesarias.

KAPA: Para proceder con el argumento, supongamos que usted hallase tal teorema maestro: «*todos los poliedros maestros son eulerianos*». ¿Se da usted cuenta de que este teorema sólo será «final» si es cierto el teorema converso: «*todos los poliedros eulerianos son poliedros maestros*»?

OMEGA: Por supuesto.

KAPA: Es decir, ¿si la certeza se pierde en la infinitud viciosa, le ocurrirá lo mismo a la finalidad? Hallará usted al menos un poliedro euleriano fuera del dominio de cada una de sus pruebas cada vez más profundas.

OMEGA: Por supuesto que sé que no es posible resolver el problema de la finalidad sin resolver el de la certeza. Estoy seguro de que los resolveremos ambos. Detendremos la infinita oleada de contraejemplos tanto del tipo primero como del tercero.

MAESTRO: Es muy importante su búsqueda de un contenido creciente, pero ¿por qué no aceptar su segundo criterio de satisfactoriedad —la finalidad— como un extra agradable, aunque no obligatorio? ¿Por qué rechazar las pruebas interesantes que no contengan condiciones necesarias y

suficientes? ¿Por qué considerarlas refutadas?

OMEGA: Bueno…[112]

LAMBDA: Sea como sea, Omega me ha convencido plenamente de que una sola prueba puede no ser suficiente para la mejora crítica de una conjetura ingenua. Nuestro método debería incluir la versión radical de su *Regla 4* y debería denominarse consiguientemente el método de *«pruebas y refutaciones»* en vez de *«prueba y refutaciones»*.

MU: Disculpe que interrumpa. Acabo de traducir los resultados de su discusión en térmicos cuasi-topológicos: El método de incorporación de lemas suministró una secuencia, que se va contrayendo, de *dominios de teoremas mejorados sucesivos* incluidos unos en otros; dichos dominios se contraían bajo el continuo ataque de contraejemplos globales en el transcurso de la emergencia de lemas ocultos y tendían a un *límite,* denominémoslo el *«dominio del análisis de la prueba»*. Si aplicamos la versión más débil de la *Regla 4,* este dominio se puede extender bajo la presión continua de los contraejemplos locales. Esta secuencia expandente tendrá a su vez un límite: lo denominaré el *«dominio de la prueba»*. La discusión ha mostrado que incluso este domino límite puede ser demasiado estrecho (quizá incluso vacío). Puede que tengamos que ingeniar pruebas *más profundas* cuyos dominios formen una secuencia *expandente,* que incluya más y más poliedros eulerianos recalcitrantes que constituían contraejemplos locales de pruebas previas. Estos dominios, que son dominios límite, convergerán hacia el doble límite del *«dominio de la conjetura ingenua»*, que constituye después de todo la meta de la investigación.

La topología de este espacio heurístico constituirá un problema para la filosofía matemática: ¿serán infinitas las secuencias, convergerán, alcanzarán el límite, no será el límite el conjunto vacío?

EPSILON: ¡He hallado una prueba más profunda que la de Cauchy, que explica también la eulerianidad del «gran dodecaedro estrellado» de Omega! [*Pasa una nota al Maestro.*]

OMEGA: ¡La prueba final! ¡Ahora se desvelará la verdadera esencia de la eulerianidad!

MAESTRO: Lo siento, pero se nos va el tiempo: tendremos que discutir la sofisticadísima prueba de Epsilon en otro momento[113]. Lo único que veo es

que no va a ser definitiva en el sentido de Omega. ¿Sí, Beta?

(c) Pruebas diferentes suministran teoremas diferentes

BETA: El punto más importante que he sacado en limpio de esta discusión es que pruebas distintas de la misma conjetura ingenua llevan a teoremas muy diferentes. *La primitiva conjetura de Descartes-Eider se mejora con cada prueba, tornándose en un teorema diferente.* Nuestra prueba original arrojaba: «*Todos los poliedros de Cauchy son eulerianos*». Ahora hemos aprendido algo sobre dos teoremas completamente distintos: «*Todos los poliedros de Gergonne son eulerianos*» y «*Todos los poliedros de Legendre son eulerianos*». Tres pruebas, tres teoremas con un antepasado común[114]. Así pues, la expresión usual «*distintas pruebas del teorema de Euler*» resulta confundente, pues oculta el papel vital que desempeñan las pruebas en la formación de teoremas[115].

PI: La diferencia entre las distintas pruebas es más profunda. Sólo la conjetura ingenua versa sobre poliedros. Los teoremas versan tan sólo sobre objetos de Cauchy, objetos de Gergonne y objetos de Legendre respectivamente, y no ya sobre poliedros.

BETA: ¿Está usted haciéndose el gracioso?

PI: No; explicaré lo que quiero decir, aunque lo haré en un contexto más amplio: deseo discutir sobre *formación de conceptos* en general.

DSETA: Deberíamos discutir antes sobre *contenido.* Encuentro que la *Regla 4* de Omega es muy débil, incluso en su interpretación radical[116].

MAESTRO: Perfecto, oigamos primero el enfoque de Dseta del problema del contenido y terminemos nuestro debate con una discusión de la formación de conceptos.

7. Vuelta sobre el Problema del Contenido

(a) La ingenuidad de la conjetura ingenua

DSETA: Coincido con Omega en deplorar que los excluidores de

monstruos, los excluidores de excepciones y los incorporadores de lemas se esfuercen todos por conseguir la verdad cierta a costa del contenido. Con todo, su *Regla 4*[117], que exige pruebas más profundas de la misma conjetura ingenua, no es suficiente. ¿Por qué nuestra búsqueda de contenido habría de estar delimitada por la primera conjetura ingenua con la que nos topemos? ¿Por qué la meta de nuestra investigación habría de ser el «dominio de la conjetura ingenua»?

OMEGA: No le sigo. ¿Acaso cabe alguna duda de que nuestro problema era descubrir el dominio de verdad de $V - A + C = 2$?

DSETA: ¡No lo era! Nuestro problema era hallar la relación entre V, A y C para un poliedro cualquiera. No fue más que un simple accidente que nos familiarizásemos en primer lugar con poliedros para los que $V - A + C = 2$. Sin embargo, un examen crítico de esos poliedros «eulerianos» nos mostró que hay muchos más poliedros no eulerianos que eulerianos. ¿Por qué no buscar el dominio de $V - A + C = -6$, $V - A + C = 28$ o $V - A + C = 0$? ¿Acaso no son igualmente interesantes?

SIGMA: Está usted en lo cierto. Prestamos tanta atención a $V - A + C = 2$ sólo porque pensábamos originariamente que era verdadero. Pero ahora sabemos que no lo es; hemos de hallar una *conjetura ingenua nueva más profunda…*

DSETA:… que resultará menos ingenua…

SIGMA:… que consistirá en una relación entre V, A y C para *cualquier* poliedro.

OMEGA: ¿Por qué precipitarse? Resolvamos primero el problema más modesto que nos hemos propuesto resolver: explicar por qué algunos poliedros son eulerianos. Hasta ahora, sólo hemos llegado a explicaciones parciales. Por ejemplo, ninguna de las pruebas halladas ha explicado por qué un marco de cuadro con caras anulares en la parte de delante y en la de atrás es euleriano (fig. 16). Posee 16 vértices, 24 aristas y 10 caras…

ZETA: No es, ciertamente, un poliedro de Cauchy: tiene un túnel, caras anulares…

BETA: ¡Y con todo es euleriano! ¡Qué irracional! ¿Un poliedro culpable de una sola falta (un túnel sin caras anulares (fig. 9)) ha de ser relegado con

los chivos, mientras que otro que delinque el doble de veces (al tener también caras anulares (fig. 16)) ha de ser admitido con las ovejas?[118]

OMEGA: Como ve, Dseta, ya tenemos bastantes rompecabezas con los poliedros eulerianos. Resolvámoslos antes de abordar un problema más general.

DSETA: No, Omega. «Puede resultar más fácil resolver varias cuestiones que resolver una sola. Un nuevo problema más ambicioso puede resultar más fácil de manejar que el problema original»[119]. Le mostraré sin lugar a dudas que su problema estrecho y accidental sólo se puede solucionar resolviendo el problema esencial más amplio.

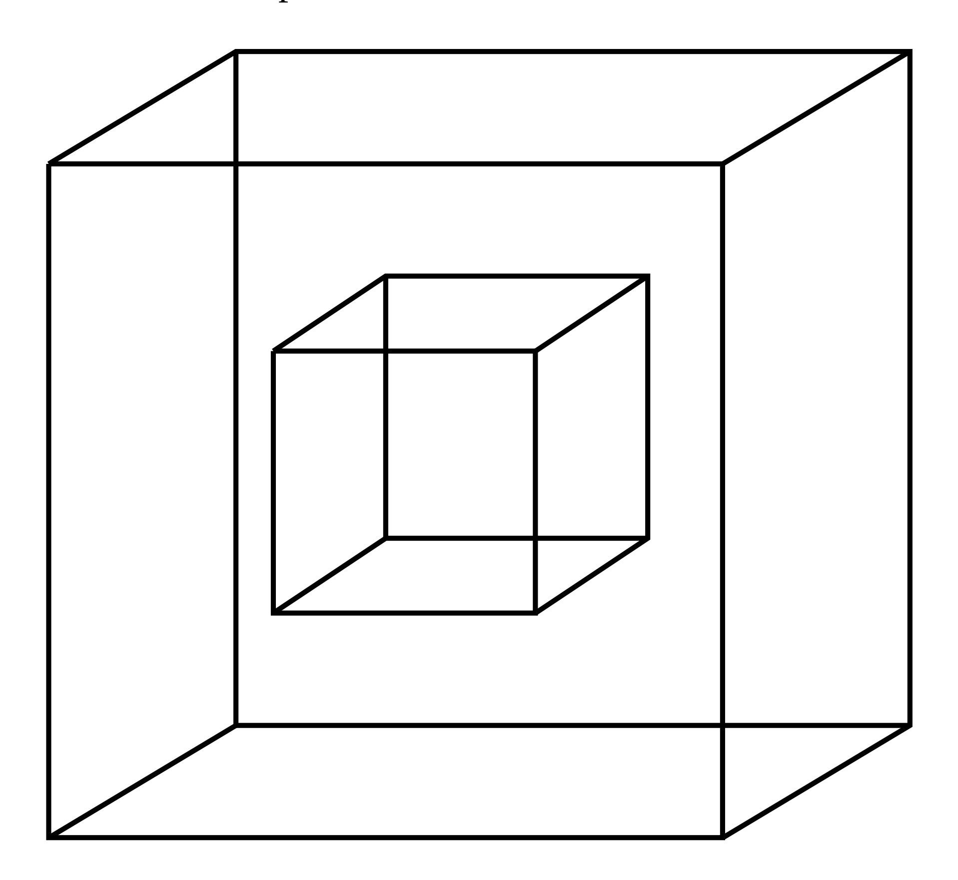


Fig. 16.

OMEGA: ¡Pero yo quiero descubrir el secreto de la eulerianidad!

DSETA: Comprendo su resistencia. Se ha enamorado usted del problema de hallar dónde ha trazado Dios la frontera entre los poliedros eulerianos y los no eulerianos. Pero no existe en absoluto razón alguna para creer que el

término «euleriano» haya aparecido en los planos divinos sobre el universo. ¿Qué pasa si la eulerianidad no es más que una propiedad accidental de algunos poliedros? En tal caso, no tendría interés e incluso sería imposible hallar los zigzags aleatorios de la línea de demarcación entre los poliedros eulerianos y los no eulerianos. Admitir tal cosa, sin embargo, dejaría intacto el racionalismo, puesto que en ese caso, la eulerianidad no formaría parte de la planificación racional del universo. Olvidémonos, por tanto, de ella. Uno de los aspectos fundamentales del racionalismo crítico es que siempre estamos preparados para abandonar nuestro problema original en el curso de la solución, sustituyéndolo por otro.

(b) La inducción como base del método de pruebas y refutaciones

SIGMA: Dseta está en lo cierto. ¡Qué desastre!

DSETA: ¿Desastre?

SIGMA: Sí. ¿Quiere usted ahora una nueva «conjetura ingenua» sobre la relación entre *V*, *A* y *C* para *cualquier* poliedro, no es así? ¡Imposible! Contemple la vasta muchedumbre de contraejemplos: poliedros con cavidades, poliedros con caras anulares, con túneles, unidos por las aristas, por los vértices… ¡$V - A + C$ puede tomar cualquier valor! ¡Le resultará imposible reconocer orden alguno en este caos! Hemos abandonado el firme suelo de los poliedros eulerianos para caer en un pantano. Hemos perdido irremisiblemente una conjetura ingenua y no tenemos esperanzas de conseguir otra.

DSETA: Pero…

BETA: ¿Por qué no? Recuerde el caos aparentemente sin esperanza de nuestra tabla de vértices, aristas y caras, incluso en el caso de los poliedros más ordinarios convexos[120]. Fracasamos tantas veces a la hora de hacerlos encajar en una fórmula[121]. Pero luego, repentinamente, la regularidad real que los gobierna nos sorprendió: $V - A + C = 2$.

KAPA [*aparte*]: ¿«Regularidad real»? Simpática expresión para una falsedad manifiesta.

BETA: Lo único que tenemos que hacer ahora es completar nuestra tabla con los datos de los poliedros no eulerianos y buscar una nueva fórmula:

observando paciente y diligentemente y con un poco de suerte daremos con la correcta; luego podremos mejorarla de nuevo, aplicando el método de pruebas y refutaciones.

	Poliedro	***C***	***V***	***A***
I	cubo	6	8	12
II	prisma triangular	5	6	9
III	prisma pentagonal	7	10	15
IV	pirámide cuadrada	5	5	8
V	pirámide triangular	4	4	6
VI	pirámide pentagonal	6	6	10
VII	octaedro	8	6	12
VIII	«torre»	9	9	16
IX	«cubo truncado»	7	10	15

DSETA: ¿Observación paciente y diligente? ¿Ensayar una fórmula tras otra? ¿Acaso va usted a inventar una máquina de conjeturar que produzca fórmulas aleatorias y las contraste contra su tabla? ¿Es ésta la idea que usted tiene de cómo progresa la ciencia?

BETA: No comprendo su sarcasmo. Sin duda estará usted de acuerdo en que nuestro primer conocimiento, nuestras conjeturas ingenuas, sólo pueden surgir de la observación diligente y la repentina intuición, por mucho que nuestro método crítico de «pruebas y refutaciones» se ocupe de ello después de que hayamos *descubierto* una conjetura ingenua. ¡Todo método deductivo ha de partir de una base inductiva!

SIGMA: Su método inductivo nunca tendrá éxito. Llegamos a $V - A + C = 2$ tan sólo porque dio la casualidad de que en nuestras tablas primitivas no había ningún marco de cuadro o ningún erizo. Ahora que ese accidente histórico…

KAPA [*aparte*]:… o la benévola guía divina…

SIGMA:… ha desaparecido, nunca «inducirá» usted el orden a partir del

caos. Comenzamos con largas observaciones y una feliz intuición, y fracasamos. Ahora propone usted que comencemos de nuevo con observaciones más largas y una intuición aún más feliz. Aun cuando llegásemos a una nueva conjetura ingenua, cosa que dudo, acabaríamos en la misma confusión.

BETA: ¿Deberíamos, tal vez, abandonar completamente la investigación? *Tenemos* que comenzar de nuevo; primero, con una nueva conjetura ingenua y luego, pasando de nuevo por el método de pruebas y refutaciones.

DSETA: No, Beta. Estoy de acuerdo con Sigma y, por tanto, no comenzaré de nuevo con una conjetura ingenua.

BETA: Entonces, ¿dónde pretende usted comenzar, si no es con una generalización inductiva de bajo nivel como conjetura ingenua? ¿O, acaso posee usted un método alternativo para comenzar?

(c) Conjeturar deductivamente frente a conjeturar ingenuamente

DSETA: ¿Comenzar? ¿Por qué tendríamos que *comenzar*? Mi mente no está en blanco cuando descubro (o invento) un problema.

MAESTRO: No le tome el pelo a Beta. El problema es el siguiente: *«¿Existe una relación entre el número de vértices, aristas y caras de los poliedros análoga a la relación trivial que hay entre el número de vértices y aristas de los polígonos, a saber, que V = A?»*[122] ¿Cómo reaccionaría *usted* ante esto?

DSETA: Primero, no tengo una ayuda a la investigación del gobierno como para emprender una extensa observación de los poliedros, ni ayudantes de investigaciones suministrados por el ejército que cuenten el número de sus vértices, aristas y caras, para compilar tablas con esos datos. Pero, aun cuando dispusiese de ellos, no tendría paciencia (o interés) para ensayar una fórmula tras otra para comprobar si encaja.

BETA: ¿Entonces, qué? ¿Va usted a tumbarse en el sofá y a cerrar los ojos, olvidándose de los datos?

DSETA: Exactamente. Necesito una *idea* para comenzar con ella y no dato alguno.

BETA: ¿Y de dónde saca usted su idea?

DSETA: Esta ya ahí, en nuestra mente, cuando formulamos el problema: de hecho, está en la propia formulación del problema.

BETA: ¿Qué idea?

DSETA: La de que para un polígono, $V = A$.

BETA: ¿Y qué?

DSETA: Un problema no surge nunca de la nada, sino que siempre está relacionado con nuestro conocimiento de base. Sabemos que, para los polígonos, $V = A$. Ahora bien, un polígono es un sistema de polígonos que consta de un solo polígono. Un poliedro es un sistema de polígonos que consta de más de un polígono. Pero, para los poliedros, $V \neq A$. ¿En qué punto se rompió la relación $V = A$ en la transición de los sistemas monopoligonales a los sistemas polipoligonales? En lugar de recolectar datos, rastreo de qué modo se desarrolló el problema a partir de nuestro conocimiento básico; si no, ¿cuál era la expectativa cuya refutación presentó el problema?

SIGMA: Perfecto. Sigamos sus recomendaciones. Para cualquier polígono, $A – V = 0$ (fig. 17(*a*)). ¿Qué ocurre si le adoso otro polígono (no necesariamente en el mismo plano)? El polígono adicional posee n_1 aristas y n_1 vértices; ahora bien, al adosarlo al original a lo largo de una cadena de n'_1 aristas y $n'_1 + 1$ vértices, aumentaremos en $n_1 - n'_1$ el número de aristas y en $n_1 - (n'_1 + 1)$ el número de vértices; es decir, en el nuevo sistema bi-poligonal habrá un exceso del número de aristas sobre el número de vértices: $A – V = 1$ (fig. 17(*b*); para un adosamiento inusual, aunque perfectamente adecuado, véase la fig. 17(*c*)). «Adosar» una nueva cara al sistema aumentará siempre en uno ese exceso o, para cualquier sistema C-poligonal construido de este modo, $A – V = C + 1$.

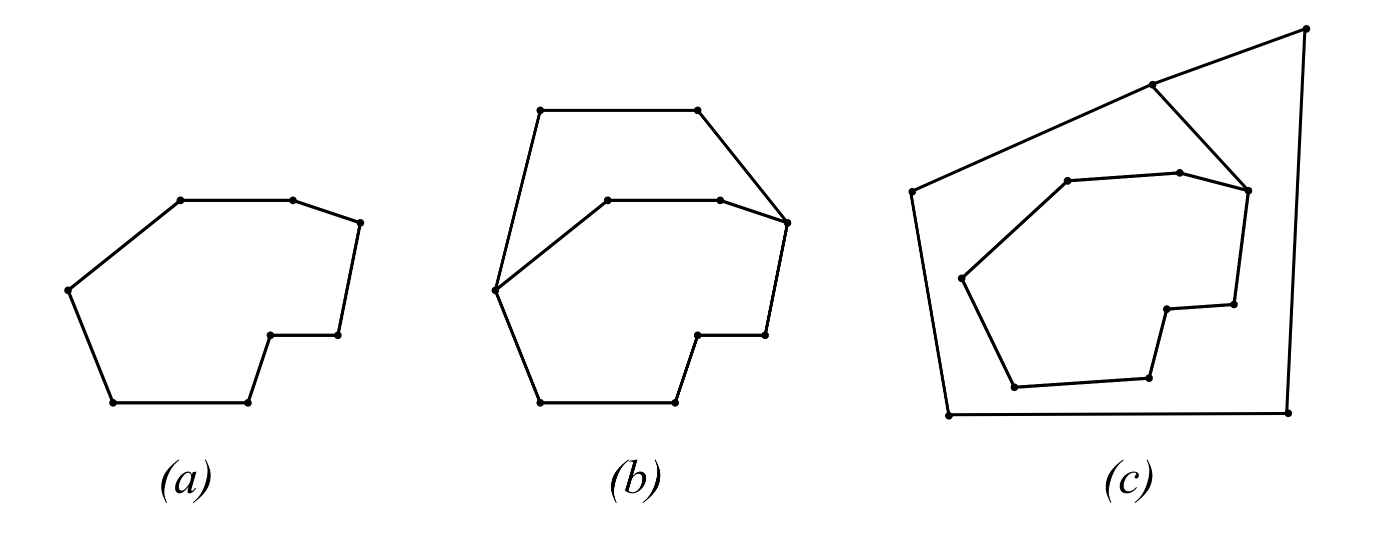


Fig. 17.

DSETA: O, $V - A + C = 1$.

LAMBDA: Sin embargo, eso es falso para la mayoría de los sistemas poligonales. Tome un cubo…

SIGMA: Pero, mi contrucción sólo puede llevar a sistemas poligonales «abiertos», limitados por un circuito de aristas. Puedo extender fácilmente mi experimento mental a sistemas poligonales «cerrados» sin un límite semejante. Tal clausura se puede llevar a cabo cubriendo un sistema poligonal abierto en forma de vaso con una tapadera poligonal: al encajar semejante tapa poligonal, aumentará *C* en uno, sin cambiar *V* o *A*…

DSETA: O, para un sistema poligonal cerrado, o poliedro cerrado, construido de este modo, $V - A + C = 2$: conjetura que acaba usted de obtener ahora sin «observar» el número de vértices, aristas y caras de un solo poliedro.

LAMBDA: Y ahora puede usted aplicar el método de pruebas y refutaciones sin un «punto de partida inductivo».

DSETA: ¡Con la diferencia de que no se necesita inventar una prueba: la prueba está ahí! Puede usted proceder inmediatamente con las refutaciones, los análisis de la prueba y la formación de teoremas.

LAMBDA: ¡Así que, según su método, en vez de las observaciones, la prueba precede a la conjetura ingenua![123]

DSETA: Bueno, yo no denominaría «ingenua» a una conjetura que se ha desarrollado a partir de una prueba. En mi método no hay lugar para ingenuidades inductivas.

BETA: ¡Objeción! Lo único que ha hecho usted es retrotraer el comienzo inductivo «ingenuo»: partió usted de «$V = A$ para los polígonos». ¿Acaso no basa usted eso en observaciones?

DSETA: Como a la mayoría de los matemáticos, no se me da bien eso de contar. Acabo de tratar de contar las aristas y vértices de un heptágono y primero hallé 7 aristas y 8 vértices y, luego, 8 aristas y 7 vértices…

BETA: Bromas aparte, ¿cómo *halló* usted que $V = A$?

DSETA: Me quedé profundamente sorprendido cuando constaté por primera vez que, en el caso de un triángulo, $V - A = 0$. Por supuesto que sabía de sobra que en una arista $V - A = 1$ (fig. 18(*a*)). También sabía que adosándole nuevas aristas, aumentaría siempre en uno el número tanto de vértices como de aristas (fig. 18(*b*) y 18(*c*)). ¿Por qué, en los sistemas poligonales de aristas, $V - A = 0$? Entonces me di cuenta de que ello se debía a la transición de un sistema abierto de aristas (que está limitado por dos vértices) a un sistema cerrado de aristas (que no posee tal límite), puesto que en esa transición «ocultamos» el sistema abierto al encajar una arista sin añadir un nuevo vértice. Así, probé, y no observe, que $V - A = 0$ para los polígonos.

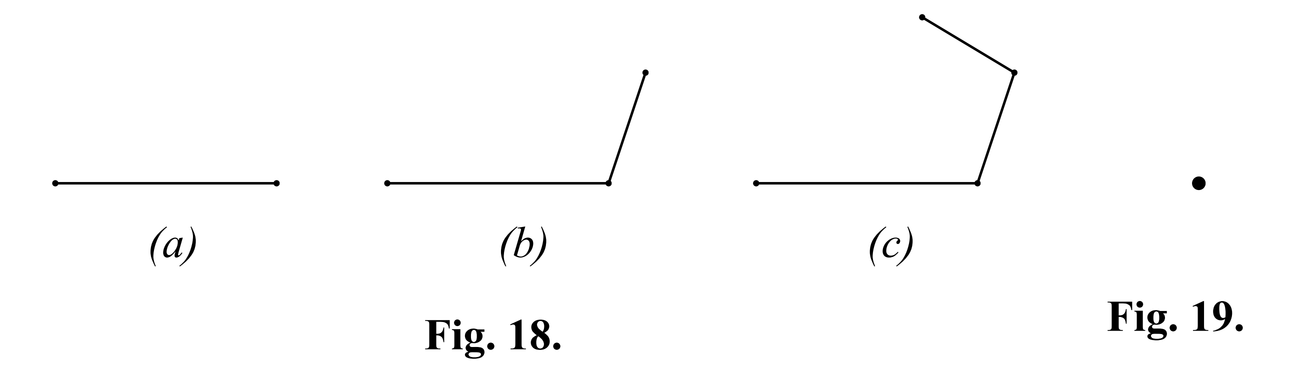


Fig. 18. **Fig. 19.**

BETA: Su ingenio no le será de ninguna ayuda. Lo único que ha hecho usted es retrotraer aún más el punto de partida inductivo: ahora, al enunciado de que $V - A = 1$ para cualquier arista que sea. ¿Eso lo ha probado usted o lo ha *observado*?

DSETA: Lo he probado. Sabía, por supuesto, que para un sólo vértice $V = 1$ (fig. 19). Mi problema era construir una relación análoga…

BETA [*furioso*]: ¿Acaso no *observó usted que para un punto* $V = 1$?

DSETA: ¿Usted sí? [*Aparte, a Pi*]: ¿Habré de decirle que mi «punto de partida inductivo» fue el espacio vacío? ¿Que comencé «observando» *nada*?

LAMBDA: Sea como sea, se han señalado dos puntos. Primero, Sigma argumentó en el sentido de que *se debe a un accidente histórico que se pueda llegar a conjeturas inductivas ingenuas:* cuando nos hallamos frente a un caos real de hechos, rara vez conseguiremos encajarlos en una fórmula elegante. Luego, Dseta mostró que *para la lógica de pruebas y refutaciones no precisamos una conjetura ingenua, no precisamos en absoluto un punto de partida inductivista.*

BETA: ¡Objeción! ¿Qué pasa con esas célebres conjeturas que *no* han sido precedidas (ni siquiera seguidas) de pruebas, tales como la conjetura de los cuatro colores, según la cual bastan cuatro colores para colorear un mapa, o la conjetura de Goldbach? Sólo se debe a accidentes históricos que las pruebas puedan preceder a los teoremas, que el «conjeturar deductivo» de Dseta pueda tener lugar: de lo contrario, las conjeturas inductivas ingenuas van primero.

MAESTRO: Ciertamente, tenemos que aprender *ambos* patrones heurísticos: el *conjeturar deductivo* es mejor, aunque el *conjeturar ingenuo* vale más que nada. Ahora bien, el *conjeturar ingenuo no es inducción; ¡no existen conjeturas inductivas!*

BETA: ¡Pero, hemos hallado la conjetura ingenua por *inducción*! «Es decir, nos fue sugerida por la observación, fue indicada por casos particulares… Y, entre los casos particulares que hemos examinado, podríamos distinguir dos grupos: los que preceden a la formulación de la conjetura y los que vienen después. Los primeros *sugerían* la conjetura, los siguientes la *apoyaban.* Ambos tipos de casos suministran una especie de contacto entre la conjetura y “los hechos”…»[124]. Este doble contacto es el corazón de la inducción: el primero constituye la *heurística inductiva* y el segundo, la justificación inductiva o *lógica inductiva.*

MAESTRO: ¡No! Los hechos ni sugieren las conjeturas ni tampoco las

apoyan.

BETA: Entonces, ¿qué me sugirió a *mí* que $V - A + C = 2$, sino los hechos recogidos en mi tabla?

MAESTRO: Le diré: usted mismo ha confesado que fracasó muchas veces a la hora de encajarlos en una fórmula[125]. Pues bien, he aquí lo que ocurrió: disponía usted de tres o cuatro conjeturas que fueron rápidamente refutadas una tras otra. Su tabla se construyó en el proceso de contrastar y refutar esas conjeturas. Dichas conjeturas muertas, ya olvidadas, fueron las que sugirieron los hechos y no los hechos las conjeturas. *Las conjeturas ingenuas no son conjeturas inductivas: las obtenemos por ensayo y error, mediante conjeturas y refutaciones*[126]. Mas, si usted cree (equivocadamente) que ha llegado a ellas inductivamente, a partir de sus tablas, si piensa usted que cuanto más larga sea la tabla más conjeturas sugerirá para apoyarlas consiguientemente, puede usted perder su tiempo reuniendo datos innecesarios. Además, al estar indoctrinado en el sentido de que el camino del descubrimiento va de los hechos a la conjetura y de la conjetura a la prueba (el mito de la inducción), puede usted olvidar totalmente la alternativa heurística: el conjeturar deductivo[127].

La heurística matemática es muy similar a la heurística científica, no porque ambas sean inductivas, sino porque ambas se caracterizan por conjeturas, pruebas y refutaciones. La diferencia (importante) estriba en la naturaleza de las respectivas conjeturas, pruebas (o, en el caso de la ciencia, explicaciones) y contraejemplos[128].

BETA: Ya veo. Entonces, nuestra conjetura ingenua no fue la *primera* conjetura que haya sido «sugerida» por hechos firmes, no conjeturales, sino que estaba precedida por muchas conjeturas y refutaciones «pre-ingenuas». La lógica de las conjeturas y refutaciones carece de punto de partida, aunque no así la lógica de pruebas y refutaciones, que parte de la primera conjetura ingenua que ha de ser seguida de un experimento mental.

ALFA: Tal vez; pero, en ese caso, ya no debería llamarla «ingenua»[129].

KAPA [*aparte*]: Ni siquiera en la heurística existe algo así como la ingenuidad perfecta.

BETA: Lo importante es salir cuanto antes del período de ensayo y error, a

fin de proceder rápidamente a realizar experimentos mentales, sin guardar demasiado respeto «inductivo» por los «hechos». Tal respeto puede ser un estorbo para el desarrollo del conocimiento. Imaginemos que se llega por ensayo y error a la conjetura $V - A + C = 2$, y que ésta queda inmediatamente refutada por la observación de que $V - A + C = 0$ en el caso del marco de cuadro. Si se tiene demasiado respeto por los hechos, especialmente cuando refutan las conjeturas de uno, se procederá con el ensayo y error pre-ingenuo, buscando otra conjetura. Pero, si se dispone de una heurística mejor, al menos se *intenta* ignorar la contrastación observacional adversa y se ensaya una *contrastación por medio de un experimento mental*, como la prueba de Cauchy.

SIGMA: ¡Qué confusión! ¿Por qué llamar *contrastación* a la *prueba* de Cauchy?

BETA: ¿Por qué llamar *prueba* a la *contrastación* de Cauchy? ¡Era una *contrastación*! Mire, usted comenzó con una conjetura ingenua, $V - A + C = 2$, para todos los poliedros. A continuación, extrajo usted consecuencias de ella: «si la conjetura ingenua es verdadera, entonces, tras eliminar una cara, tenemos que para el entramado restante $V - A + C = 1$»; «si esta consecuencia es verdadera, entonces $V - A + C = 1$ incluso después de la triangulación»; «si esta última consecuencia es verdadera, entonces $V - A + C = 1$ se mantendrá mientras que los triángulos se eliminen uno a uno»; «si esto es verdadero, entonces, para un solo triángulo, $V - A + C = 1$»…

Ahora bien, ocurre que sabemos que esta última conclusión es verdadera. Pero, ¿qué hubiera ocurrido si hubiésemos concluido que para un solo triángulo $V - A + C = 0$? Habríamos rechazado inmediatamente como falsa la conjetura original. Lo único que hemos hecho es contrastar nuestra conjetura: sacar consecuencias de ella. La contrastación parecía corroborar la conjetura, pero corroborar no es probar.

SIGMA: ¡Pero, entonces, nuestra prueba demostraba aún menos de lo que nosotros pensábamos! Tenemos, entonces, que invertir el proceso y tratar de construir un experimento mental que lleve en la dirección opuesta: del triángulo, de nuevo al poliedro.

BETA: Precisamente; sólo Dseta señaló que en lugar de resolver nuestro problema inventando primero una conjetura ingenua mediante ensayo y error,

contrastándola después, para terminar dándole la vuelta a la contrastación para convertirla en una prueba, podemos comenzar directamente con la prueba real. Si nos hubiésemos dado cuenta de la posibilidad de conjeturar deductivamente, podríamos haber evitado toda esta chapuza pseudo inductiva.

KAPA [*aparte*]: ¡Menuda serie dramática de cambios de chaqueta! ¡El crítico Alfa se ha convertido en un dogmático, el dogmático Delta, en un refutacionista y, ahora, el inductivista Beta, en un deductivista!

SIGMA: Pero, espere un momento; si el *experimento mental contrastador…*

BETA: Lo llamaré *análisis*…

SIGMA:… puede después de todo ser seguido por un *experimento mental probador…*

BETA: Lo llamaré *síntesis*…[130]

SIGMA:… ¿será el «teorema analítico» necesariamente idéntico al «teorema sintético»? Al ir en la dirección opuesta, podríamos utilizar lemas diferentes[131].

BETA: Si son diferentes, el teorema sintético debería primar sobre el analítico; después de todo, el análisis sólo *contrasta*, mientras que la síntesis *prueba*.

MAESTRO: Su descubrimiento de que nuestra «*prueba*» era de hecho una *contrastación* parece haber sorprendido a la clase, distrayendo su atención de nuestra argumentación principal; a saber, que si tenemos una conjetura que ya ha sido refutada mediante un contraejemplo, deberíamos dejar de lado la refutación para tratar de contrastar la conjetura mediante un experimento mental. De este modo, podríamos dar con una prueba, abandonar la fase de ensayo y error y pasar al método de pruebas y refutaciones. Pero, fue precisamente eso lo que me hizo decir que «deseo ponerme a "probar" una conjetura falsa»[132]. También Lambda exigía en su *Regla 1:* «Si se tiene una conjetura, hay que ponerse a probarla *y* refutarla.»

DSETA: Eso está bien; pero permítaseme complementar las reglas de Lambda, así como la *Regla 4* de Omega, mediante la

Regla 5. Si tiene usted contraejemplos de cualquier tipo, trate de hallar por medio del conjeturar deductivo un teorema más profundo, respecto al cual ya no sean contraejemplos.

OMEGA: Está usted ampliando ahora mi concepto de «profundidad», y puede que esté usted acertando. Pero, ¿qué pasa con la aplicación práctica de su nueva regla? Hasta ahora sólo nos ha suministrado resultados que ya conocíamos. Es muy fácil ser un sabio tras producirse los acontecimientos. Su «conjeturar deductivo» no es más que la *síntesis* correspondiente al *análisis* original del maestro. Ahora debería ser usted honesto y utilizar su método para hallar una conjetura anteriormente desconocida, con el prometido aumento de contenido.

DSETA: Exacto. Comienzo con el teorema generado por *mi* experimento mental: *«Todos los poliedros normales cerrados son Eulerianos.»*

OMEGA: ¿Normales?

DSETA: No deseo perder el tiempo pasando por el método de prueba y refutaciones. Me limito a llamar «normales» a todos los poliedros que se pueden construir a partir de un polígono «perfecto» adosándole (*a*) primero, C - 2 caras, sin cambiar $V - A + C$ (estos poliedros serán normales y *abiertos*) y (*b*) una última cara que cierre, que aumenta $V - A + C$ en 1 (convirtiendo así el poliedro *abierto* en *cerrado*).

OMEGA: ¿«Polígono perfecto»?

DSETA: Por polígono «perfecto» entiendo aquel que se puede construir a partir de un único vértice, adosándole primero n - 1 aristas, sin cambiar $V - A$ y, luego, una última arista que cierre, lo que disminuye $V - A$ en 1.

OMEGA: ¿Coincidirán sus poliedros normales cerrados con nuestros poliedros de Cauchy?

DSETA: No quiero entrar ahora en eso.

(d) Aumento del contenido mediante conjeturar deductivo

MAESTRO: Basta ya de perliminares. Veamos su deducción.

DSETA: Sí, Señor. Tomo dos poliedros cerrados normales (fig. 20(*a*)) y los

uno a lo largo de un circuito poligonal, de modo que desaparezcan las dos caras que se encuentran (fig. 20(*b*)). Puesto que, para los dos poliedros, $V - A + C = 4$, la desaparición de dos caras en el poliedro unido restaurará exactamente la fórmula de Euler, lo que no es ninguna sorpresa, según la prueba de Cauchy, ya que el nuevo poliedro se puede hinchar para que forme una bola[133]. Así, la fórmula se mantiene bien frente a esta prueba del encolado de los poliedros. Mas, intentemos ahora una prueba de encolado doble: «encolemos» los dos poliedros a lo largo de dos circuitos poligonales (fig. 20(*c*)). Ahora, desaparecerán 4 caras y, para el nuevo polígono, tendremos que $V - A + C = 0$.

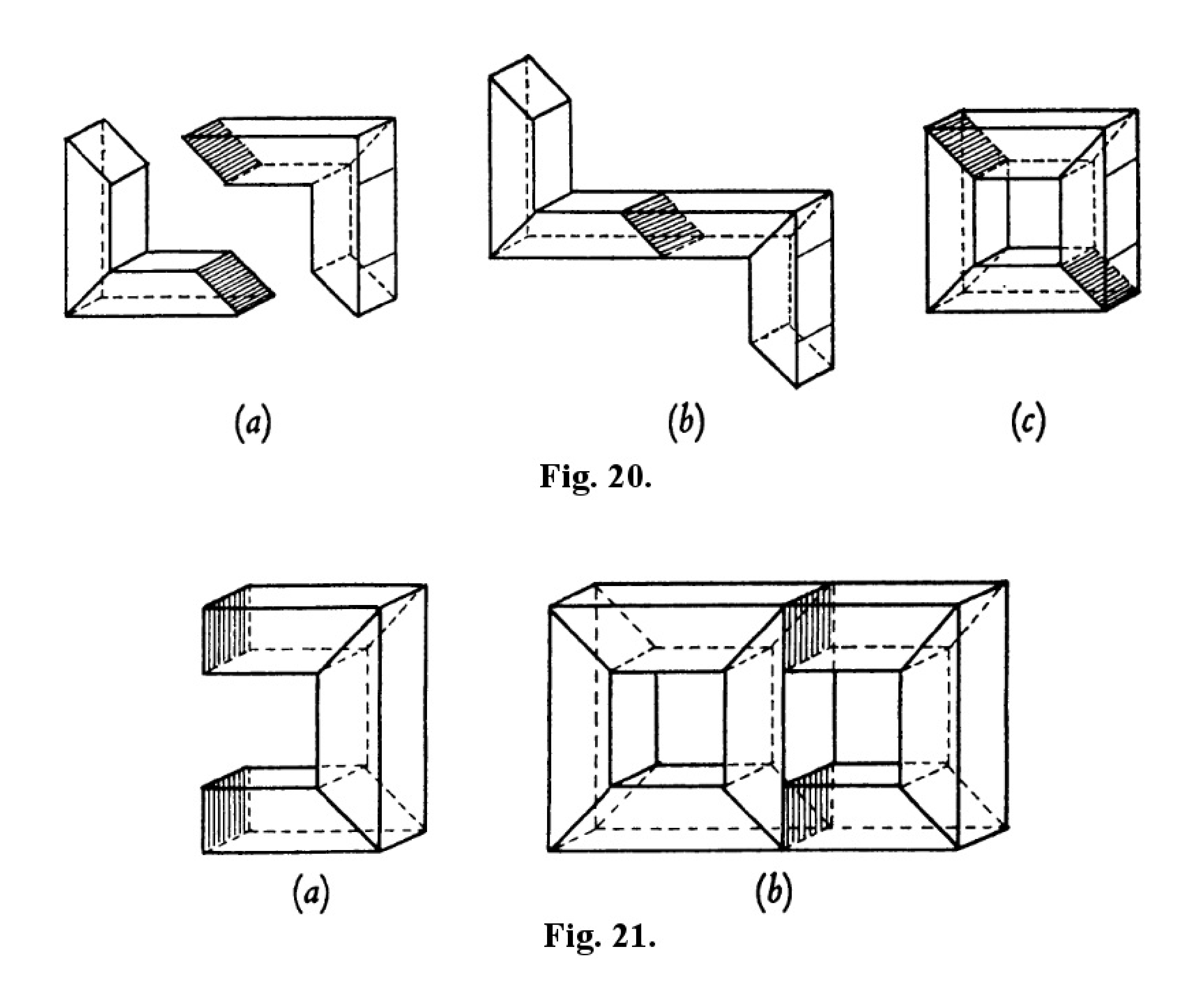


Fig. 20.

Fig. 21.

GAMMA: ¡Se trata del *Contraejemplo 4* de Alfa, el marco de cuadro!

DSETA: Sí, ahora, a este marco de cuadro (fig. 20(*c*)) le «doble-encolo»

otro poliedro normal (fig. 21 (*a*)), $V - A + C$ será -2 (fig. 21 (*b*))…

SIGMA: Para un poliedro monoesferoide $V - A + C = 2$, para uno diesferoide $V - A + C = 0$, para uno triesferoide $V - A + C = -2$, para un poliedro *n*-esferoide $V - A + C = 2 - 2(n - 1)$…

DSETA:… lo que constituye su nueva conjetura de contenido sin precedentes, completada con su prueba y sin haber compilado una sola tabla[134].

SIGMA: Realmente encantador. No sólo ha explicado usted el obstinado marco de cuadro, sino que además ha producido usted una variedad infinita de nuevos contraejemplos…

DSETA: Completados con su explicación.

RO: Yo he llegado exactamente al mismo resultado por un camino diferente. Dseta comenzó con dos ejemplos eulerianos y los convirtió en un contraejemplo mediante un experimento controlado. Yo parto de un contraejemplo y lo convierto en un ejemplo. He realizado el siguiente experimento mental con un marco de cuadro: «Supongamos que el poliedro esté hecho de cierta substancia fácil de cortar, como si fuese barro blando. Pasemos un hilo por el túnel y luego por el barro. El marco no se desarmará…»[135] Por el contrario, se habrá convertido en un poliedro esferoide, simple y familiar. Bien es cierto que aumentamos en 2 el número de caras y en *m* el número de aristas y vértices, pero, puesto que sabemos que la característica de Euler para un poliedro simple es 2, el original tiene que haber tenido la característica 0. Ahora bien, si precisamos más cortes de esos, digamos *n*, para reducir el poliedro a uno simple, entonces su característica será $2 - 2n$.

SIGMA: Eso es interesante. Ya nos ha mostrado Dseta que podemos no precisar una conjetura para comenzar a *probar* y que podemos ingeniar inmediatamente una *síntesis*, es decir, una prueba-experimento mental a partir de una proposición emparentada con ella que sepamos que es verdadera. Ahora, muestra Ro que podemos no precisar una conjetura incluso para comenzar a *contrastar*, sino que podemos proponernos (*pretendiendo* que el resultado ya está ahí) ingeniar un *análisis*, es decir, un experimento mental contrastador[136].

OMEGA: Pero, sea cual sea el camino escogido, sigue usted dejando sin explicar hordas de poliedros. Según su nuevo teorema, para todos los poliedros *V* - *A* + *C* es un número par, menor que 2. Con todo, hemos visto unos pocos poliedros con características de Euler *impares.* Tomemos el cubo con cresta (fig. 12) con *V* - *A* + *C* = 1…

DSETA: Nunca he dicho que mi teorema se aplique a *todos* los poliedros. Sólo se aplica a todos los poliedros *n*-esferoides elaborados de acuerdo con mi construcción. Tal como está, mi construcción no lleva a caras anulares.

OMEGA: ¿Y entonces?

SIGMA: ¡Ya sé! También se puede extender a poliedros con caras anulares: se puede construir un polígono anular borrando una arista en un conveniente sistema de polígonos generado por la prueba, sin reducir por ello el número de caras (figs. 22(*a*) y 22(*b*)). Me pregunto si tal vez habrá también sistemas de polígonos «normales», construidos de acuerdo con nuestra prueba, en los que podamos borrar incluso más de una arista sin reducir el número de caras…

GAMMA: Eso es verdad. Mire este sistema poligonal «normal» (fig. 23(*a*)). Puede usted borrar dos aristas sin reducir el número de caras (fig. 23(*b*)).

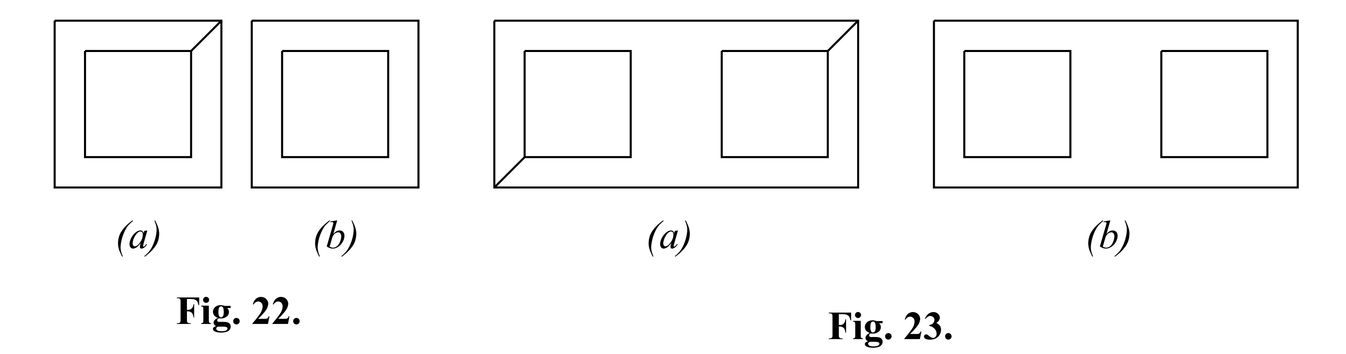


Fig. 22. **Fig. 23.**

SIGMA: ¡Estupendo! Entonces, en general,

$$V - A + C = 2 - 2(n - 1) + \sum_{k=1}^{F} e_k$$

para un poliedro *n*-esferoide (o *n*-tuplamente conexo) con e_k aristas borradas,

sin reducción del número de caras.

BETA: Esta fórmula explica el cubo con cresta de Alfa (fig. 12), un poliedro monosferoide (n = 1) con una cara anular: e_k son cero, excepto para e_6 que es 1, o $\sum_{k=1}^{F} e_k$ = 1; consiguientemente, $V - A + C = 3$.

SIGMA: También explica su «irracional» extravagancia euleriana: el cubo con dos caras anulares y un túnel (fig. 16). Se trata de un poliedro disferoide (n = 2) con $\sum_{k=1}^{F} e_k$ = 2. Por tanto, su característica es $V - A + C = 2 - 2 + 2 = 2$. ¡El orden moral se ha restaurado en el mundo de los poliedros![137]

OMEGA: ¿Qué pasa con los poliedros con cavidades?

SIGMA: ¡Ya sé! Para ellos, lo único que tenemos que hacer es sumar las características eulerianas de cada superficie desconexa:

$$V - A + C = \sum_{j=1}^{K} \left\{ 2 - 2(n_j - 1) + \sum_{k=1}^{F} e_{kj} \right\}.$$

BETA: ¿Y los tetraedros gemelos?

SIGMA: ¡Yo lo sé!…

GAMMA: ¿Para qué sirve toda esta precisión? ¡Basta ya de esta oleada de pretenciosas trivialidades![138]

ALFA: ¿Por qué? ¿Acaso los tetraedros gemelos son monstruos y no poliedros genuinos? Un tetraedro gemelo es un poliedro tan bueno como su cilindro. A usted le gustaba la precisión *lingüística*[139], ¿por qué ridiculiza entonces nuestra nueva precisión? Tenemos que hacer que el teorema cubra *todos* los poliedros; al hacerlo preciso, estamos aumentando su contenido y no disminuyéndolo. ¡En este caso la precisión es una virtud!

KAPA: ¡Las virtudes aburridas son tan malas como los vicios aburridos! Además, nunca conseguirá usted la precisión *completa*. Hemos de detenernos cuando deje de ser interesante proseguir.

ALFA: Tengo una consideración diferente que hacer. Partimos de

(1) un vértice es un vértice.
De ahí dedujimos
(2) $V = A$ para todos los polígonos perfectos.
De ellos dedujimos
(3) $V - A + C = 1$ para todos los sistemas poligonales normales y abiertos.
De ello
(4) $V - A + C = 2$ para todos los sistemas poligonales normales y cerrados, es decir, los poliedros.
Sucesivamente, dedujimos una vez más de ello que
(5) $V - A + C = 2 - 2(n - 1)$ para los poliedros *n*-esferoides normales.
(6) $V - A + C = 2 - 2(n-1) + \sum_{k=1}^{F} e_k$ para los poliedros *n*-esferoides normales con caras múltiples conexas.
(7) $V - A + C = \sum_{j=1}^{K} \left\{ 2 - 2(n_j - 1) + \sum_{k=1}^{F} e_{kj} \right\}$ para los poliedros *n*-esferoides normales con caras múltiples conexas y con cavidades.

¿Acaso no es esto un milagroso despliegue de la oculta riqueza del punto de partida trivial? Y, puesto que (1) es indudablemente verdadero, también lo es el resto.

RO [*aparte*]: ¿«Riqueza» oculta? Los dos últimos puntos lo único que muestran es cuán *pobres* pueden tornarse las generalizaciones[140].

LAMBDA: ¿Cree usted realmente que (1) es el único axioma del que se sigue todo lo demás? ¿Aumenta el contenido esa deducción?

ALFA: ¡Por supuesto! ¿No es éste el milagro del experimento mental deductivo? Si consigue usted alguna vez un poco de verdad, la deducción la expande infaliblemente en un árbol de conocimiento[141]. Si una deducción *no* aumenta el contenido, yo no la llamaría deducción, sino «verificación»: «la verificación difiere de la verdadera demostración precisamente en que es puramente analítica y estéril»[142].

LAMBDA: Pero, sin duda la deducción no puede aumentar el contenido. Si la crítica revela que la conclusión es más rica que la premisa, hemos de reforzar la premisa explicitando los lemas ocultos.

KAPA: Además, son esos lemas ocultos los que contienen la sofisticación

y la falibilidad, destruyendo finalmente el mito de la deducción infalible[143].

MAESTRO: ¿Alguna otra pregunta acerca del método de Dseta?

(e) Contraejemplos lógicos frente a contraejemplos heurísticos.

ALFA: Me gusta la *Regla 5* de Dseta[144], del mismo modo que me gustaba la *Regla 4* de Omega[145]. Me gustaba el método de Omega, porque buscaba contraejemplos locales, que no globales: precisamente los que las tres reglas originales de Lambda[146] ignoraban por ser lógicamente inocuas y, por tanto, carentes de interés heurístico. Sin embargo, Omega se vio estimulado por ellas para la invención de nuevos experimentos mentales, avances reales en nuestro conocimiento.

Ahora Dseta se ve inspirado por contraejemplos que son tanto globales como locales; corroboraciones perfectas desde el punto de vista lógico, pero no desde el heurístico; aunque sean corroboraciones, siguen exigiendo la acción. Dseta propone ampliar, sofisticar nuestro original experimento mental para convertir en heurísticas las corroboraciones lógicas, de modo que los casos lógicamente satisfactorios lo sean también no sólo desde el punto de vista lógico, sino además desde el heurístico.

Tanto Omega como Dseta están a favor de las ideas nuevas, mientras que Lambda y especialmente Gamma están preocupados por los trucos lingüísticos que les permitan abordar sus irrelevantes contraejemplos globales y no locales, que son los únicos relevantes desde su excéntrico punto de vista.

ZETA: Así que el punto de vista lógico es «excéntrico», ¿no?

ALFA: *Su* punto de vista lógico sí lo es. Pero deseo hacer otra consideración. Sea que la deducción aumente o no el contenido (nótese, sin embargo, que por supuesto que lo aumenta), sin duda parece garantizar *el desarrollo continuo del conocimiento.* Comenzamos por un vértice y dejamos que el conocimiento crezca potente y armoniosamente para explicar la relación que existe entre el número de vértices, aristas y caras de un poliedro cualquiera. ¡Se trata de un crecimiento sin dramatismos ni refutaciones!

ZETA [*a Kapa*]: ¿Acaso Alfa ha perdido el juicio? ¡Se parte de *un problema*, no de un vértice![147]

ALFA: Esta campaña parcial, aunque irresistiblemente victoriosa, nos conducirá a teoremas que no son «evidentes por sí mismos, sino que se deducen solamente de principios verdaderos y conocidos por la acción continua e ininterrumpida de una mente que posee una clara visión de cada uno de los pasos del proceso»[148]. Nunca hubiesen podido ser alcanzados por una observación «neutral» y por un repentino fogonazo de intuición.

ZETA: Tengo mis dudas sobre esta victoria final. Tal desarrollo nunca nos conducirá al cilindro, ya que (1) parte de un vértice y el cilindro carece de ellos. Asimismo, podemos no llegar nunca a un poliedro uni-lateral o a poliedros multi-dimensionales. Puede ocurrir perfectamente que esta expansión pieza a pieza y continua se detenga en un punto, lo que le obligue a buscar un nuevo comienzo revolucionario. Además, incluso esta «pacífica continuidad» está llena de refutaciones y de crítica. ¿Por qué procedemos de (4) a (5), de (5) a (6), de (6) a (7) si no es bajo la continuada presión de contraejemplos tanto globales como locales? Lambda aceptaba como contraejemplos genuinos sólo aquellos que son globales pero no locales, que descubrían la *falsedad* del teorema. La innovación de Omega, adecuadamente alabada por Alfa, consistía en considerar también los contraejemplos locales pero no globales como contraejemplos genuinos: revelaban *la pobreza de la verdad* del teorema. Ahora, Dseta nos pide que reconozcamos como genuinos incluso aquellos contraejemplos que son tanto globales como locales; también ellos apuntan a *la pobreza de la verdad* del teorema. Por ejemplo, los marcos de cuadro constituyen contraejemplos tanto locales como globales del teorema de Cauchy: son, por supuesto, corroboraciones por lo que respecta exclusivamente a la *verdad*, aunque son refutaciones por lo que atañe al *contenido*. Podemos denominar *lógicos* a los primeros contraejemplos (los globales pero no locales) y *heurísticos* a los demás. Pero, cuantas más refutaciones reconozcamos (lógicas o heurísticas) más rápidamente crecerá el conocimiento. Alfa considera irrelevantes los contraejemplos lógicos y rehúsa dar el nombre de contraejemplos a los heurísticos, debido a su obsesión con la idea de que el desarrollo del conocimiento matemático es continuo y en él no desempeña ninguna función la crítica.

ALFA: Usted expande artificialmente los conceptos de refutación y de crítica sólo para justificar su teoría crítica del desarrollo del conocimiento.

¿Se trata de trucos lingüísticos como herramientas del filósofo crítico?

PI: Pienso que una discusión de la formación de conceptos podría ayudarnos a dilucidar la cuestión.

GAMMA: Somos todos oídos.

8. Formación de Conceptos

(a) Refutación mediante extensión de conceptos. Nueva estimación de la exclusión de monstruos y de los conceptos de error y refutación.

PI: Me gustaría retraerme primero al período pre-Dseta o incluso al pre-Omega, a los tres métodos principales de formación de teoremas: exclusión de monstruos, exclusión de excepciones y el método de pruebas y refutaciones. Cada uno de ellos partía de la misma conjetura ingenua aunque terminaba con *teoremas* diferentes y distintos *términos teóricos.* Ya antes ha trazado Alfa algunos aspectos de estas diferencias[149], pero su explicación es insatisfactoria, especialmente en el caso de la exclusión de monstruos y del método de pruebas y refutaciones. Alfa pensaba que el teorema excluidor de monstruos «oculta tras la identidad de la expresión lingüística una mejora esencial» de la conjetura ingenua: pensaba que Delta *contraía* gradualmente la clase de los poliedros «ingenuos» para formar una clase purgada de monstruos no-eulerianos.

GAMMA: ¿Qué es lo que pasa con esta explicación?

PI: Que no eran los excluidores de monstruos quienes *contraían* los conceptos; eran los refutacionistas quienes los *expandían.*

DELTA: ¡Ahí queda eso!

PI: Volvamos a la época de los primeros exploradores de nuestro tema. Estaban fascinados por la bella simetría de los poliedros *regulares:* pensaban que los cinco cuerpos regulares contenían el secreto del Cosmos. En la época en que se planteó la conjetura de Descartes-Euler, el concepto de poliedro incluía todo tipo de poliedros convexos e incluso algunos cóncavos. Pero sin duda no incluía los poliedros que no eran simples o poliedros con caras anulares. Para los poliedros que tenían en mente, la conjetura *era* verdadera

tal como estaba y la prueba no tenía ni un fallo[150].

Entonces llegaron los refutacionistas. Con su celo crítico, ampliaron el concepto de poliedro de modo que abarcase objetos que eran ajenos a la interpretación pretendida. La conjetura era verdadera en su *interpretación* pretendida, mientras que era falsa tan sólo en una *interpretación no buscada*, introducida de contrabando por los refutacionistas. Su «refutación» no revelaba ningún *error* en la conjetura original, ninguna *equivocación* en la prueba original: revelaba la falsedad de una *nueva* conjetura que nadie había pensado ni planteado anteriormente.

¡Pobre Delta! Defendió valientemente la interpretación original de poliedro. Se enfrentó a cada contraejemplo con una nueva cláusula para salvaguardar el concepto original…

GAMMA: ¿Pero no era Delta quien cambiaba de posición cada vez? Siempre que presentábamos un nuevo contraejemplo cambiaba su definición por otra más larga que mostrase otra de sus cláusulas «ocultas».

PI: ¡Vaya estimación monstruosa de la exclusión de monstruos! Tan sólo *parecía* estar cambiando de posición. Se equivocaban ustedes al acusarle de utilizar subrepticios epiciclos terminológicos en la obstinada defensa de una idea. Su infortunio fue aquella portentosa *Definición 1:* «Un poliedro es un sólido cuya superficie consta de caras poligonales» que los refutacionistas asediaron inmediatamente. Pero, Legendre pretendía que cubriese *solamente* sus poliedros ingenuos; el hecho de que abarcase mucho más era algo totalmente imprevisto e inintencionado por parte de quien la proponía. El público matemático estaba deseoso de apechugar con el contenido monstruoso que emergía lentamente de esta definición plausible y aparentemente inocente. Por eso Delta tenía que balbucir una y otra vez, «Yo quería decir…», y tenía que seguir explicitando interminablemente sus cláusulas «tácitas»; todo porque el concepto ingenuo nunca había sido precisado, habiendo sido sustituido por una impretendida definición, simple aunque monstruosa. Pero, imaginemos una situación distinta en la que la definición hubiese fijado adecuadamente la pretendida definición de «poliedro». En ese caso, hubiese sido tarea de los refutacionistas ingeniar *definiciones incluidoras de monstruos* aún más largas para, pongamos por caso, «poliedros complejos»: «Un poliedro complejo es un agregado de

poliedros (reales) tal que dos de estos se sueldan por caras congruentes». «Las caras de los poliedros complejos pueden ser polígonos complejos que sean agregados de polígonos (reales), de modo que dos de ellos se suelden por aristas congruentes.» Este *poliedro complejo* correspondería entonces al concepto de *poliedro* generado por la refutación, debido a Alfa y Gamma: la primera definición permite también poliedros que no sean simples y la segunda, caras que no sean simplemente conexas. Así, ingeniar nuevas definiciones no es necesariamente tarea de los excluidores de monstruos o preservadores de conceptos; también puede ser la de los incluidores de monstruos o ampliadores de conceptos[151].

SIGMA: ¡Así pues, los conceptos y definiciones (quiero decir, los pretendidos conceptos y definiciones) pueden jugarse buenas pasadas unos a otros! Nunca soñé que la formación de conceptos pudiese ir a la zaga de una definición impretendidamente amplia.

PI: Podría. Los excluidores de monstruos se limitan a mantenerse fieles al concepto original, mientras que los ampliadores de conceptos lo ensanchan. Lo más curioso de todo es que la ampliación de conceptos procede subrepticiamente: nadie se da cuenta de ella y, puesto que el «sistema coordinado» de cada cual se expande con el concepto que se amplía son presa de la ilusión heurística de que la exclusión de monstruos *estrecha* los conceptos, cuando de hecho los mantiene invariables.

DELTA: ¿Quién era entonces el deshonesto intelectualmente? ¿Quién hacia cambios subrepticios en su posición?

GAMMA: Admito que estábamos equivocados al acusar a Delta de hacer contracciones subrepticias en su concepto de poliedro: sus seis definiciones denotaban todas ellas el mismo buen y viejo concepto de poliedro que había heredado de sus mayores. *Definía el mismísimo concepto pobre en marcos de referencia teóricos, o lenguajes, progresivamente más ricos: la exclusión de monstruos no forma conceptos, sino que sólo traslada definiciones.* El teorema excluidor de monstruos no constituye una mejora de la conjetura ingenua.

DELTA: ¿Quiere usted decir que mis definiciones eran todas ellas lógicamente equivalentes?

GAMMA: Eso depende de su teoría lógica; según la mía no lo son, con

toda certeza.

DELTA: No es una respuesta muy útil, como tendrá usted que admitir. Pero dígame, ¿refutó usted la conjetura ingenua? ¡La refutó usted sólo porque pervirtió subrepticiamente su interpretación original!

GAMMA: Bien, la refutamos en una interpretación más imaginativa e interesante de lo que usted hubiera soñado nunca. Eso es lo que establece la diferencia entre *las refutaciones que sólo revelan un error tonto* y *las refutaciones que constituyen episodios relevantes en el desarrollo, del conocimiento.* Si hubiese usted hallado que «para todos los poliedros $V - A + C = 1$», debido a que usted hiciese mal las cuentas y yo le hubiese corregido, entonces yo no llamaría a eso una «refutación».

BETA: Gamma tiene razón; tras las revelaciones de Pi, deberíamos dudar a la hora de denominar *contraejemplos locales* a nuestros «contraejemplos», puesto que, después de todo, no son inconsistentes con la conjetura en su pretendida interpretación. Con todo, no cabe duda de que son *contraejemplos heurísticos,* puesto que hacen brotar el desarrollo del conocimiento. Si hubiésemos de aceptar la estrecha lógica de Delta, el conocimiento no se desarrollaría. Supongamos por un momento que alguien, con el marco conceptual estrecho, descubre la prueba de Cauchy de la conjetura de Euler. Halla que todos los pasos de su experimento mental se pueden realizar fácilmente en *cualquier* poliedro. Considera como obvio, como indudable, el «hecho» de que todos los poliedros son simples y de que todas las caras son simplemente conexas. Nunca se le ocurre convertir sus lemas «obvios» en condiciones de una conjetura mejorada, construyendo así un teorema, puesto que le falta el estímulo de los contraejemplos que muestren la falsedad de algunos lemas «trivialmente verdaderos». Así pues, piensa que la «prueba» establece sin sombra de duda la verdad de la conjetura ingenua, que su verdad está fuera de duda. Sin embargo, esa «certeza» está lejos de constituir una señal de éxito, siendo tan sólo un síntoma de falta de imaginación, de pobreza conceptual. Produce una afectada satisfacción e impide el desarrollo del conocimiento[152].

(b) Conceptos generados por la prueba frente a conceptos ingenuos. Clasificación teórica frente a clasificación ingenua.

PI: Permítaseme volver sobre el teorema generado por la prueba: «Todos los *poliedros* simples con caras simplemente conexas son eulerianos». Se trata de una formulación confundente. Debería decir: «Todos los *objetos* simples con caras simplemente conexas son eulerianos.»

GAMMA: ¿Por qué?

PI: La primera formulación sugiere que la clase de los poliedros simples que aparece en el teorema es una subclase de la clase de los «poliedros» de la conjetura ingenua.

SIGMA: ¡Por supuesto que la clase de los poliedros simples es una subclase de los poliedros! El concepto de «poliedro simple» *contrae* la clase amplia original de poliedros, al restringirla a aquellos sobre los que se puede realizar el primer lema de nuestra prueba. El concepto de «poliedro simple con caras simplemente conexas» indica una ulterior contracción de la clase original…

PI: ¡No! La clase original de poliedros contenía tan sólo poliedros que eran simples y cuyas caras eran simplemente conexas. Omega estaba equivocado cuando decía que la incorporación de lemas reduce el contenido[153].

OMEGA: Pero, ¿acaso cada incorporación de lemas no elimina un contraejemplo?

PI: Por supuesto que sí; pero se trata de un contraejemplo producido por un ensanchamiento de conceptos.

OMEGA: ¿Entonces, la incorporación de lemas *conserva* el contenido, al igual que la exclusión de monstruos?

PI: No. La incorporación de lemas *aumenta* el contenido, cosa que no ocurre con la exclusión de monstruos.

OMEGA: ¿Cómo? ¿Pretende usted realmente convencerme no sólo de que la incorporación de lemas no *reduce* el contenido, sino además de que lo *aumenta*? ¿En lugar de *contraer* los conceptos los *ensancha*?

PI: Exactamente. Escuche, ¿acaso un globo con un mapa político dibujado sobre él constituye un elemento de la clase original de los poliedros?

OMEGA: Ciertamente, no.

PI: Pero pasó a serlo, tras la prueba de Cauchy. En efecto, puede usted

llevar a cabo con él la prueba de Cauchy sin la menor dificultad con la única condición de que no haya en él países o mares anulares[154].

GAMMA: Eso es cierto. El hecho de inflar un poliedro hasta hacerlo un balón, distorsionando las aristas y caras, no perturbará en lo más mínimo la realización de la prueba, siempre y cuando la distorsión no altere el *número* de vértices, aristas y caras.

SIGMA: Ya veo lo que se quiere decir. El «poliedro simple» generado por la prueba no es sólo una contracción, una especificación, sino también *una generalización*, una *expansión* del «poliedro» ingenuo[155]. La idea *de generalizar* el concepto de poliedro, de modo que incluya «poliedros» arrugados, *curvilíneos*, con caras *curvas*, difícilmente se le hubiese ocurrido a alguien antes de la prueba de Cauchy; aun cuando hubiese ocurrido así, hubiese sido relegado como algo excéntrico. Mas, ahora, constituye una generalización natural, puesto que las operaciones de nuestra prueba pueden interpretarse para ellos con la misma facilidad que para los poliedros ingenuos ordinarios con aristas rectas y caras planas[156].

PI: Muy bien. Pero tiene usted que dar un paso adicional. Los *conceptos generados por la prueba* no son ni «especificaciones» ni «generalizaciones» de conceptos ingenuos. El impacto de las pruebas y refutaciones sobre los conceptos ingenuos es mucho más revolucionario que todo eso: *borran* completamente los conceptos ingenuos cruciales y los *remplazan* por conceptos generados por la prueba[157]. El término ingenuo «poliedro», incluso después de haber sido ampliado por los refutacionistas, denotaba algo de carácter cristalino, un sólido con caras «planas» y aristas rectas. Las ideas de la prueba se tragaron este concepto ingenuo, digiriéndolo completamente. En los distintos teoremas generados por la prueba, no nos queda nada del concepto ingenuo, que ha desaparecido sin dejar rastro. En su lugar, cada prueba suministra sus característicos conceptos generados por la prueba, que se refieren a la ampliabilidad, inflabilidad, fotografiabilidad, proyectabilidad y similares. Desaparecen los viejos problemas y aparecen otros nuevos. Después de Colón, no debería sorprendernos que *no se resuelvan los problemas que uno se ha propuesto resolver*.

SIGMA: Así pues, la «teoría de los sólidos», el ámbito «ingenuo» original de la conjetura de Euler, se disuelve y la conjetura remodelada reaparece en

geometría proyectiva cuando la prueba Gergonne, en topología analítica cuando la prueba Cauchy, en topología algebraica cuando la prueba Poincaré…

PI: Exactamente. Ahora comprenderá usted por qué no formulé los teoremas como Alfa o como Beta, diciendo: «Todos los poliedros de Gergonne son eulerianos», «Todos los poliedros de Cauchy son eulerianos», etc., sino más bien, diciendo: «Todos los objetos de Gergonne son eulerianos», «Todos los objetos de Cauchy son eulerianos», etc.[158] *Así pues, encuentro que carece de interés no sólo disputar acerca de la exactitud de los conceptos ingenuos, sino también sobre la verdad o falsedad de las conjeturas ingenuas.*

BETA: ¿Pero, acaso no es cierto que podemos mantener el término «poliedro» en el caso de nuestro término favorito generado por la prueba, esto es, «objetos de Cauchy»?

PI: Si usted se empeña; pero recuerde que *su término ya no denota lo que pretendía denotar,* recuerde que su significado ingenuo ha desaparecido y que ahora se usa…

BETA:… ¡para un concepto mejorado y más general!

ZETA: ¡No! Para un concepto nuevo, totalmente distinto.

SIGMA: ¡Pienso que sus puntos de vista resultan paradójicos!

PI: Si por paradójico entiende usted «una opinión aún no aceptada generalmente»[159] y tal vez inconsistente con algunas de sus ideas ingenuas pertinaces, pierda usted cuidado: lo único que tiene usted que hacer es sustituir sus ideas ingenuas por las paradójicas. Puede que éste sea el modo de «solucionar» las paradojas. ¿Pero, a qué idea particular mía se refiere usted?

SIGMA: Recuerda usted que hallamos que algunos poliedros estrellados eran eulerianos, mientras que otros no. Buscábamos una prueba lo suficientemente profunda como para explicar la eulerianidad tanto de los poliedros ordinarios como de los estrellados…

EPSILON: Yo la tengo[160].

SIGMA: Ya lo sé. Pero, en función del argumento que quiero presentar, imaginemos que no existe semejante prueba y que alguien ofrece, además de

la prueba de Cauchy para los poliedros «ordinarios» eulerianos, otra prueba correspondiente, aunque completamente distinta, para los poliedros estrellados eulerianos. En ese caso, Pi, ¿propondría usted dividir en dos lo que antes se clasificaba como uno, debido a la existencia de esas dos pruebas diferentes? ¿Acaso aceptaría usted tener dos cosas completamente distintas unidas bajo un mismo nombre, sólo porque alguien encuentra una explicación común para algunas de sus propiedades?

PI: Por supuesto que sí. Con toda certeza, yo no llamaría pez a una ballena ni caja ruidosa a una radio (como hacen los aborígenes) y no me molesta que un físico se refiera al cristal como un líquido. Ciertamente, el progreso sustituye la *clasificación ingenua* por la *clasificación teórica*, es decir, por una clasificación generada por la teoría (generada por la prueba o, si lo prefiere, por la explicación). Tanto las conjeturas como los conceptos han de pasar ambos por el purgatorio de pruebas y refutaciones. *Las conjeturas ingenuas y los conceptos ingenuos se ven superados por conjeturas (teoremas) mejoradas y por conceptos (generados por la prueba o conceptos teóricos) que se desarrollan a partir del método de pruebas y refutaciones.* Del mismo modo que las ideas y conceptos teóricos superan las ideas y conceptos ingenuos, el lenguaje teórico supera el lenguaje ingenuo[161].

OMEGA: Al final, llegaremos a la clasificación real, verdadera y final, al lenguaje perfecto, tras haber partido de una clasificación ingenua y accidental, meramente nominal[162].

(c) Vuelta sobre las refutaciones lógicas y heurísticas

PI: Permítaseme retomar algunos de los temas que han surgido en conexión con el conjeturar deductivo. Tomemos primero el problema de los contraejemplos heurísticos frente a los lógicos, tal como surgió en la discusión entre Alfa y Zeta.

Mi exposición ha mostrado, creo, que incluso los llamados contraejemplos «lógicos» eran heurísticos. En la pretendida interpretación original, no hay inconsistencia entre (*a*) todos los poliedros son eulerianos y (*b*) el marco de cuadro no es euleriano.

Si nos mantenemos fieles a las reglas semánticas tácitas de nuestro lenguaje original, nuestros contraejemplos no son tales. Se convierten en contraejemplos lógicos tan sólo cuando cambiamos las reglas del lenguaje mediante la ampliación de conceptos.

GAMMA: ¿Quiere usted decir que *todas* las refutaciones interesantes son heurísticas?

PI: Exactamente. No puede usted separar refutaciones y pruebas por una parte y cambios en el marco lingüístico, taxonómico y conceptual, por otra. Normalmente, cuando se presenta un «contraejemplo», tiene usted una posibilidad de elección: o decide usted no preocuparse de él, puesto que no constituye un contraejemplo en absoluto en su lenguaje *dado* L_1, o acepta usted cambiar su lenguaje mediante la ampliación de conceptos y acepta el contraejemplo en su nuevo lenguaje L_2…

DSETA:… ¡y lo *explica* usted en L_3!

PI: Según la racionalidad estática tradicional, usted debería elegir la primera alternativa. La ciencia nos enseña a elegir la segunda.

GAMMA: Es decir, tenemos dos enunciados que resultan consistentes en L_1 pero pasamos a L_2, donde son inconsistentes. O, podemos tener dos enunciados que son inconsistentes en L_1 y pasamos a L_2, donde son consistentes. A medida que crece el conocimiento, los lenguajes cambian. «Todo período de creación es a la vez un período en el que cambia el lenguaje»[163]. El desarrollo del conocimiento no se puede modelar en ningún lenguaje dado.

PI: Eso está bien. La heurística se ocupa de la dinámica del lenguaje, mientras que la lógica se ocupa de la estática del lenguaje.

(d) Extensión de conceptos teórica frente a extensión de conceptos ingenua. Crecimiento continuo frente a crecimiento crítico.

GAMMA: Prometió usted volver sobre la cuestión de si es cierto o no que el conjeturar deductivo nos ofrece un patrón continuo de desarrollo del conocimiento.

PI: Permítame bosquejar primero algunas de las diversas formas

históricas que puede tomar este patrón *heurístico.*

El *primer patrón fundamental* se produce cuando la extensión de conceptos ingenua supera con mucho a la teoría y produce un vasto caos de contraejemplos: nuestros conceptos ingenuos se aflojan sin que los sustituyan conceptos teóricos algunos. En este caso, el conjeturar deductivo puede ocuparse por partes de la acumulación de contraejemplos. Si usted quiere, se trata de un patrón continuo «generalizador»; pero no olvide que comienza con refutaciones, que su continuidad consiste en una explicación pieza a pieza mediante una teoría en desarrollo de las refutaciones heurísticas de su primera versión.

GAMMA: ¡O bien, el desarrollo «continuo» sólo indica que las refutaciones están varios kilómetros por delante!

PI: Eso es cierto. Pero, puede ocurrir que cada refutación aislada o cada expansión de conceptos ingenuos sea *inmediatamente* seguida por una expansión de la teoría (y de los conceptos teóricos) que explique el contraejemplo. La «continuidad», entonces, da lugar a una excitante sucesión de refutaciones ampliadoras de conceptos y teorías cada vez más poderosas, de *expansión ingenua de conceptos y ampliación de conceptos teórica* y explicativa.

SIGMA: ¡Dos variaciones históricas accidentales del mismo tema heurístico!

PI: Bien, realmente no hay mucha diferencia entre ellas. En ambas, *el poder de la teoría reside en su capacidad para explicar sus refutaciones en el transcurso de su desarrollo.* Pero hay un segundo patrón fundamental de conjeturar deductivo…

SIGMA: ¿Otra variación accidental más?

PI: Sí, si usted quiere. Con todo, en esta variación, la teoría en desarrollo no sólo *explica,* sino que también *produce* sus refutaciones.

SIGMA: ¿Qué?

PI: En este caso, el desarrollo supera (y, ciertamente, elimina) la extensión ingenua de conceptos. Por ejemplo, se comienza, digamos, con el teorema de Cauchy sin un solo contraejemplo en el horizonte. Entonces, se pone a prueba el teorema transformando el poliedro de todas las maneras

posibles: cortándolo en dos, cortando esquinas piramidales, doblándolo, distorsionándolo, inflándolo… Algunas de estas ideas contrastadoras conducirán a ideas probadoras[164] (al llegar a algo que se sabe que es verdadero y volviendo entonces hacia atrás; es decir, siguiendo el patrón de análisis y síntesis de Pappo), mientras que algunas otras como «la prueba del encolado doble» de Dseta, no nos retrotraerá a algo ya conocido, sino que nos conducirá a una novedad real, a alguna refutación heurística de la proposición contrastada (y eso, *no mediante la extensión de un concepto ingenuo, sino mediante la extensión del marco teórico).* Este tipo de refutación es auto-explicativa…

IOTA: ¡Qué dialéctico! Las contrastaciones se tornan en pruebas, los contraejemplos se hacen mediante el mismo método de su construcción…

PI: ¿Por qué dialéctico? La contrastación de una proposición se convierte en la prueba de *otra* proposición más profunda y los contraejemplos de la primera en ejemplos de la segunda. ¿Por qué llamar dialéctica a la confusión? Pero, permítame volver de nuevo a lo que quería decir. No pienso que mi segundo patrón fundamental de conjeturar deductivo se pueda considerar, como haría Alfa, un desarrollo continuo del conocimiento.

ALFA: Por supuesto que se puede. Compare nuestro método con la idea, debida a Omega, de sustituir una idea de prueba por otra radicalmente distinta, más profunda. Ambos métodos aumentan el contenido, pero mientras que con el método de Omega se *sustituyen* operaciones de la prueba que resultan aplicables en un estrecho dominio por otras operaciones aplicables en uno más amplio o, más radicalmente, sustituye toda la prueba por otra que sea aplicable en un dominio más amplio, el conjeturar deductivo *extiende* la prueba dada añadiéndole operaciones que amplían su aplicabilidad. ¿No es esto continuidad?

SIGMA: ¡Eso está muy bien! Del teorema deducimos una cadena de teoremas cada vez más amplios; del caso especial, casos aún más generales. ¡Generalización por deducción![165]

PI: Mas llena de contraejemplos, tan pronto como reconozca usted que *cualquier* aumento de contenido, *cualquier* prueba más profunda, sigue o genera refutaciones heurísticas de los teoremas anteriores más pobres…

ALFA: Zeta expandía «contraejemplo» de modo que abarcase los

contraejemplos heurísticos. Ahora lo expande usted para que cubra los contraejemplos heurísticos que nunca habían existido de hecho. Su pretensión de que su «segundo patrón» esté lleno de contraejemplos se basa en la extensión del concepto de contraejemplo a contraejemplos con una vida cero, cuyo descubrimiento coincide con su explicación. Pero, ¿por qué debería ser «crítica» toda actividad intelectual, toda lucha por el aumento de contenido en un marco teórico unificado? ¡Su dogmática «actitud crítica» no hace más que oscurecer la cuestión!

MAESTRO: No cabe duda que la disputa entre usted y Pi es oscura, ya que su «desarrollo continuo» y el «desarrollo crítico» de Pi son perfectamente consistentes. En lo que yo estoy más interesado es en las *limitaciones,* si es que las hay, del conjeturar deductivo o «crítica continua».

(e) Los límites del aumento de contenido. Refutaciones teóricas frente a refutaciones ingenuas

PI: Creo que, tarde o temprano, el desarrollo «continuo» está abocado a un callejón sin salida, a un *punto de saturación* de la teoría.

GAMMA: ¡Pero, sin duda podré siempre extender algunos de los conceptos!

PI: Por supuesto. La extensión de conceptos *ingenua* puede proseguir, pero la *teórica* tiene sus límites. Las refutaciones en función de una extensión de conceptos ingenua no son más que tábanos que nos aguijonean para que procedamos con una extensión de conceptos teórica. Así, pues, existen dos tipos de refutaciones. Nos *topamos* por coincidencia o buena suerte, o bien por una expansión arbitraria de algún concepto, con los del primer tipo. Son como los milagros, su conducta «anómala» está sin explicar; los aceptamos como contraejemplos de buena fe tan sólo porque estamos acostumbrados a aceptar críticas que extienden los conceptos. A éstos los denominaré contraejemplos *ingenuos* o *extravagantes.* Luego, están los *contraejemplos teóricos,* que o bien se producen originalmente por extensión de la prueba o, alternativamente, son extravagancias a las que se llega mediante pruebas extendidas que los explican, con lo que se elevan a la condición de contraejemplos teóricos. Las extravagancias han de considerarse con grandes

prevenciones, ya que pueden no ser contraejemplos genuinos, sino ejemplos de una teoría totalmente distinta, cuando no errores sin más.

SIGMA: ¿Pero, qué hemos de hacer cuando nos estancamos; cuando no podemos convertir nuestros contraejemplos ingenuos en teóricos, mediante la expansión de nuestra prueba original?

PI: Podemos tantear una y otra vez si nuestra teoría posee aún o no cierta oculta capacidad de desarrollo. Con todo, algunas veces poseemos buenas razones para rendirnos. Por ejemplo, como muy bien ha señalado Zeta, si nuestro conjeturar deductivo parte de un vértice, entonces no está nada claro que podamos esperar nunca explicar el cilindro sin vértices.

ALFA: ¡Así, después de todo, el cilindro no era un monstruo, sino una extravagancia!

ZETA: Con todo, no se deberían desestimar las cosas extravagantes, pues constituyen refutaciones *reales:* no pueden encajarse en un patrón de «generalizaciones» continuas y de hecho pueden obligarnos a revolucionar nuestro marco teórico…[166]

OMEGA: ¡Bien! Se puede llegar a un *punto de saturación relativo* de una cadena *particular* de conjeturar deductivo, pero entonces se da con una idea de prueba revolucionaria, nueva y más profunda, con más poder explicativo. A la postre, uno todavía se dedica a la prueba *final,* sin límite, sin punto de saturación, sin extravagancias que la refuten.

PI: ¿El qué? ¿Una sola teoría unificada para explicar *todos* los fenómenos del universo? ¡Jamás! Más tarde o más temprano nos acercaremos a algo así como un *punto de saturación absoluto.*

GAMMA: Realmente, a mí no me preocupa que sea o no así. Si un contraejemplo se puede explicar mediante una extensión pobre y *trivial* de la prueba, yo lo consideraría ya como una extravagancia. Repito, no veo ninguna utilidad a generalizar «poliedro» para que incluya un poliedro con cavidades: no se trata de un poliedro, sino de una clase de poliedros. Yo me olvidaría también de las «caras múltiplemente conexas»; ¿por qué no trazar las diagonales que faltan? Por lo que respecta a la generalización que incluye tetraedros gemelos, yo sacaría la pistola: sólo sirve para confeccionar fórmulas pretenciosas y complicadas para nada.

RO: ¡Al fin descubre usted mi método de ajuste de monstruos![167] Le libra a usted de generalizaciones superficiales. Omega no debiera de haber denominado «profundidad» al contenido; *no todo aumento de contenido es también un aumento de profundidad:* ¡piense en (6) y (7)![168]

ALFA: Así pues, ¿usted se detendría en el (5) de mi serie?

GAMMA: Sí. (6) y (7) no constituyen un desarrollo, sino una degeneración. En lugar de proceder a (6) y (7), yo hallaría y explicaría más bien algún nuevo contraejemplo *excitante*[169].

ALFA: Puede que esté usted en lo cierto, después de todo. ¿Pero quién decide *dónde* detenerse? La profundidad es sólo una cuestión de gustos.

GAMMA: ¿Por qué no disponer de críticos matemáticos, del mismo modo que tenemos críticos literarios, para desarrollar el gusto matemático mediante la crítica pública? Incluso tal vez podamos detener la marea de pretenciosas trivialidades en los escritos matemáticos[170].

SIGMA: Si nos detenemos en (5) y convertimos la teoría de los poliedros en una teoría de esferas trianguladas con *n* asas, ¿cómo podremos, si surge la necesidad, manejar anomalías triviales como las explicadas en (6) y (7)?

MU: ¡Juego de niños!

ZETA: Exacto. Nos detenemos, entonces, en (5) por un momento. *¿Pero, nos podernos detener?* ¡La extensión de conceptos puede refutar (5)! Podemos ignorar la extensión de un concepto si suministra un contraejemplo que muestre la pobreza del contenido de nuestro teorema. Pero, si la extensión suministra un contraejemplo que muestre su palmaria falsedad, ¿qué pasa entonces? Podemos negarnos a aplicar nuestra *Regla 4* o *Regla 5* para el aumento de contenido, a fin de explicar una extravagancia; pero hemos de aplicar nuestra *Regla 2* preservadora de contenido, a fin de evitar la refutación por una extravagancia.

GAMMA: ¡Eso es! Podemos desestimar las *«generalizaciones»* pobres, pero difícilmente podemos desestimar las *refutaciones* «pobres».

SIGMA: ¿Por qué no construir una definición excluidora de monstruos de «poliedro», añadiendo una nueva cláusula para cada extravagancia?

ZETA: En ambos casos, vuelve de nuevo nuestra vieja pesadilla, la viciosa infinitud.

ALFA: Mientras está usted aumentando el contenido, desarrolla usted ideas, hace matemáticas; después, clarifica conceptos, hace lingüística. ¿Por qué no detenerse sin más cuando dejamos de aumentar el contenido? ¿Por qué quedar atrapados en infinitudes viciosas?

MU: ¡No matemáticas frente a lingüística de nuevo! El conocimiento nunca saca provecho de tales disputas.

GAMMA: El término «nunca» en seguida se convierte en «pronto». Yo estoy totalmente a favor de emprender de nuevo nuestra vieja discusión.

MU: ¡Pero si ya hemos terminado en un rotundo fracaso! ¿O, acaso, tiene alguien algo nuevo que decir?

KAPA: Creo que yo sí tengo.

9. Acerca de cómo la crítica puede convertir la verdad matemática en verdad lógica

(a) La extensión ilimitada de conceptos destruye el significado y la verdad

KAPA: Ya ha dicho Alfa que nuestro «viejo método» lleva a una infinitud viciosa[171]. Gamma y Lambda respondían con la esperanza de que la marea de refutaciones pudiese agotarse[172]; pero ahora que comprendemos el mecanismo del éxito de las refutaciones (la extensión de conceptos), sabemos que la suya era una esperanza vana. Para cualquier proposición, hay siempre una interpretación suficientemente estrecha de sus términos tal que resulta verdadera y una interpretación lo suficientemente amplia como para hacerla falsa. Cuál sea la interpretación pretendida y cuál la no pretendida depende, por supuesto, de las intenciones que tengamos. A la primera interpretación podemos denominarla *interpretación dogmática, verificacionista o justificacionista*, y a la segunda, *escéptica, crítica o refutacionista*. Alfa consideraba a la primera una estratagema convencionalista[173], aunque ahora vemos que la segunda también lo es. Todos ustedes ridiculizaron las interpretaciones dogmáticas que Delta hacía de la conjetura ingenua[174] y, a continuación, la interpretación dogmática que hacía Alfa del teorema[175]. Sin embargo, la extensión de conceptos refutará *cualquier* enunciado y no dejará

ningún enunciado verdadero.

GAMMA: Un momento; es verdad que extendimos «poliedro» y luego lo despedazamos y lo arrojamos por la borda: como señalaba Pi, el concepto ingenuo de «poliedro» ya no figura en el teorema.

KAPA: Pero, entonces, iniciará usted una extensión de un término del teorema, ¿no? Usted mismo decidió extender «cara simplemente conexa» a fin de que incluyese el círculo y la envoltura del cilindro[176]. Dio usted a entender que era una cuestión de honestidad intelectual ofrecer el cuello para conseguir la respetable condición de refutabilidad; es decir, hacer posible la interpretación refutacionista. Pero, debido a la extensión de conceptos, refutabilidad significa refutación. Así pues, se desliza usted por la pendiente de la infinitud al refutar *cada* teorema y sustituirlo por otro más «riguroso», por otro cuya falsedad aún no ha sido «puesta al descubierto». Con todo, *usted nunca sale de la falsedad.*

SIGMA: ¿Qué pasa si nos detenemos en un punto, adoptamos interpreraciones justificacionistas y no nos movemos de la verdad ni de la forma lingüística particular en la que se expresa esa verdad?

KAPA: En ese caso, tendrá usted que eliminar los contraejemplos que extienden los conceptos mediante definiciones excluidoras de monstruos. En ese caso, se deslizará usted por otra pendiente infinita: se verá usted obligado a admitir que no era lo suficientemente precisa cada una de las «formas lingüísticas particulares» de su teorema verdadero, viéndose en la necesidad de incorporarle más y más definiciones «rigurosas» expresadas en términos cuya vaguedad aún no ha sido puesta de manifiesto. Pero, así, *nunca saldrá usted de la vaguedad*[177].

ZETA [*aparte*]: ¿Qué hay de malo con una heurística en la que la vaguedad es el precio que pagamos por el desarrollo?

ALFA: Ya se lo he dicho: los conceptos precisos y las verdades inquebrantables no residen en el lenguaje, sino tan sólo en el pensamiento.

GAMMA: Permítame que le lance un reto, Kapa. Volvamos al teorema tal y como estaba tras haber tomado en cuenta el cilindro: «Para todos los objetos simples con caras simplemente conexas, tales que las aristas de las caras terminen en vértices, $V - A + C = 2$.» ¿Cómo refutaría usted *esto* con el

método de extensión de conceptos?

KAPA: En primer lugar, retrocedo hasta los términos definitorios y despliego plenamente la proposición. A continuación, decido qué concepto extender. Por ejemplo, «simple» alude a «extensible en un plano, después de haber eliminado una cara». Extenderé lo de «extender». Tomemos los tetraedros gemelos, ya discutidos, el par con una *arista* en común (fig. 6(*a*)). Es sencillo, sus caras son simplemente conexas, pero $V - A + C = 3$. Así pues, nuestro teorema es falso.

GAMMA: ¡Pero estos tetraedros gemelos no son simples!

KAPA: Por supuesto que sí. Eliminando una cara, puedo extenderlo en un plano. Lo único que tengo que hacer es andar con cuidado al llegar a la arista crítica, a fin de no rasgar nada al abrir el segundo tetraedro a lo largo de esa arista.

GAMMA: ¡Pero eso no es extender! Usted *rasga o divide* la arista en dos. Sin duda usted no puede proyectar un pundo en dos: *extender es una proyección bicontinua uno a uno.*

KAPA: *¿Def. 7?* Me temo que esta interpretación estrecha y dogmática de «extender» carezca de atractivo para *mi* sentido común. Por ejemplo, puedo imaginar perfectamente que extiendo un cuadro (fig. 24(*a*)) en dos cuadros encajados uno en otro, mediante la extensión de las líneas del límite (fig. 24(*b*)). ¿Consideraría usted que esta extensión constituye una rasgadura o separación, por el simple hecho de que no sea «una proyección bicontinua uno a uno»? Por cierto, me pregunto por qué no habrá definido usted extender como una transformación que deje inalterados *V, A* y *C,* tirando para adelante con ellos.

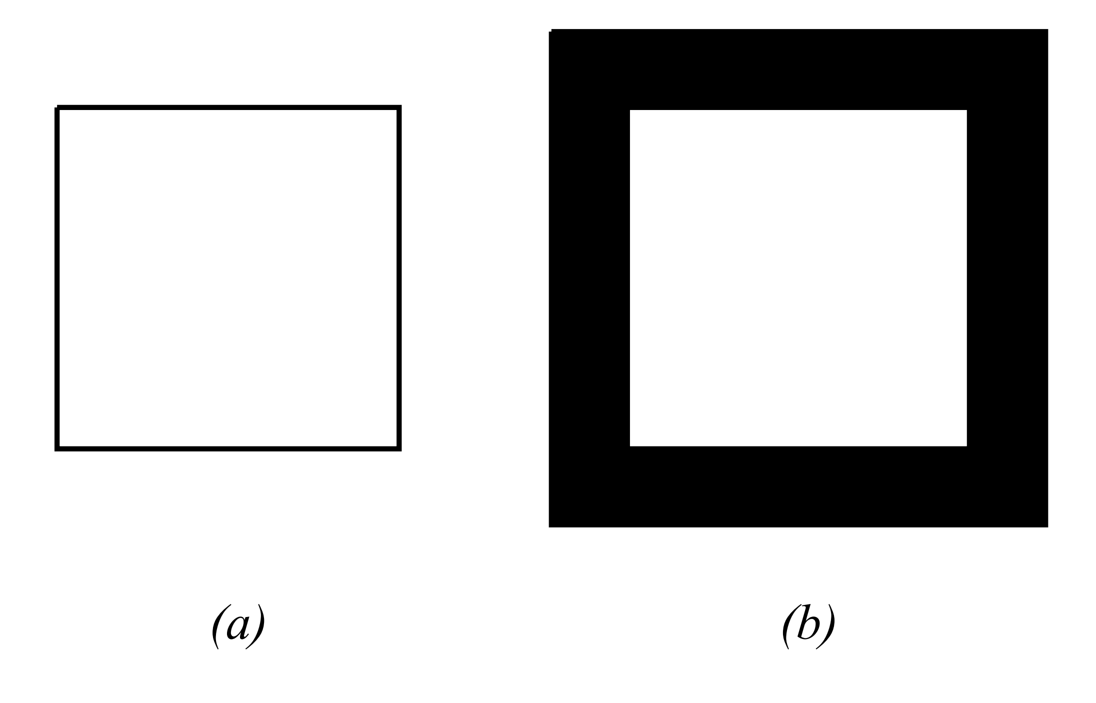


Fig. 24.

GAMMA: Vale; usted gana de nuevo. O bien tengo que estar de acuerdo con su interpretación refutacionista de «extender» y extender mi prueba, o bien tengo que hallar otra más profunda o incorporar un lema (o bien tengo que introducir una nueva definición excluidora de monstruos). Con todo, en cualquiera de esos casos, siempre haré que mis términos definitorios sean cada vez más claros. ¿Por qué no voy a poder llegar a un punto en que los significados de los términos sean tan claros como el cristal, de modo que sólo haya una interpretación, como ocurre con 2 + 2 = 4? No hay nada elástico en el significado de estos términos y nada hay de refutable en la verdad de esta proposición que brilla por siempre bajo la luz natural de la razón.

KAPA: ¡Débil luz!

GAMMA: Extienda, si es que puede.

KAPA: ¡Pero si no es más que un juego de niños! En ciertos casos, dos y dos son cinco. Supóngase que pedimos que nos manden dos artículos que pesan dos libras cada uno; nos los envían en una caja que pesa una libra; entonces, en ese paquete, dos libras y dos libras son cinco libras.

GAMMA: Pero, usted obtiene cinco libras sumando *tres* pesos, 2, 2 y 1.

KAPA: Cierto; nuestra operación «2 y 2 son 5» no es una adición en el

pretendido sentido original. Pero podemos hacer que el resultado sea verdadero mediante una simple extensión del significado de adición. La adición ingenua es un caso muy especial de empaquetado, cuando el peso del material envolvente es cero. Tenemos que incorporar este lema en la conjetura a modo de condición: nuestra conjetura mejorada será «2 + 2 = 4 para la adición "imponderal"»[178]. Toda la historia del álgebra es una serie de tales extensiones de conceptos (y de pruebas).

GAMMA: Pienso que lleva usted un poco lejos la «extensión». La próxima vez interpretará usted «más» como «por» y lo considerará una refutación. O bien interpretará usted «todo» como «ningún» en «todo poliedro es un poliedro». Extiende usted el concepto de extensión de conceptos. Hemos de demarcar la refutación mediante *extensión racional* de la «refutación» mediante *extensión irracional*. No podemos permitir que usted extienda cualquier término que se le antoje por el procedimiento que le apetezca.

¡Hemos de fijar el concepto de contraejemplo en términos claros como el cristal!

DELTA: Incluso Gamma se ha convertido en un excluidor de monstruos: ahora anda detrás de una definición excluidora de monstruos de refutación extendedora de conceptos. *¡Después de todo, la racionalidad depende de conceptos inelásticos y exactos!*[179]

KAPA: *¡Pero, no existen tales conceptos! ¿Por qué no aceptar que nuestra capacidad para especificar lo que querernos decir es cero, por lo que nuestra capacidad de probar es cero? Si quiere usted que las matemáticas tengan sentido, ha de abandonar usted la certeza.* Si quiere usted certeza, elimine el significado. No puede usted tener ambas cosas. *Un galimatías está a salvo de la refutación, pero las proposiciones significativas son refutables por extensión de conceptos.*

GAMMA: Entonces, su último enunciado también puede ser refutado, y usted lo sabe. «Los escépticos no constituyen una secta de personas persuadidas de lo que dicen, sino que constituyen una secta de mentirosos»[180].

KAPA: ¡Imprecaciones: he ahí el último recurso de la razón!

(b) La extensión mitigada de conceptos puede convertir la verdad matemática en verdad lógica

ZETA: Creo que Gamma está en lo cierto cuando habla de la necesidad de demarcar la extensión de conceptos racional de la irracional, puesto que la extensión de conceptos ha recorrido un largo camino y ha pasado de ser una actividad suave y racional a convertirse en una actividad radical e irracional.

Inicialmente, la crítica se concentra exclusivamente en una *ligera* extensión de *un* concepto *particular.* Tiene que ser *ligera,* para que pase desapercibida; si su naturaleza real (extendedora) fuese descubierta, podría no ser aceptada como crítica legítima. Se concentra en *un* concepto *particular,* como en el caso de nuestras proposiciones universales más bien sencillas: *«Todos los A son B».* La crítica, entonces, equivale a dar con un *A* ligeramente extendido (*poliedro,* en nuestro caso) que no sea B (euleriano, en nuestro caso).

Pero, Kapa agudizó esto en dos direcciones. Primero, para exponer al ataque de la crítica mediante extensión de conceptos *más de un* constituyente de la proposición. Segundo, para convertir la extensión de conceptos de una actividad subrepticia y más bien modesta en una *deformación abierta* del concepto, como la deformación de «todos» en «ninguno». Aquí, cualquier traducción significativa de los términos atacados que haga falso al teorema se acepta como una refutación. Yo diría entonces que *si una proposición no se puede refutar respecto a los constituyentes a, b…, entonces es lógicamente verdadera respecto a esos constituyentes.*[181] Tal proposición es el resultado final de un largo proceso crítico-especulativo, en el transcurso del cual la carga significativa de algunos términos se transfiere completamente a los restantes términos y a la forma del teorema.

Ahora, lo único que Kapa dice es que no hay proposiciones que sean lógicamente verdaderas por respecto a *todos* sus constituyentes. Con todo, puede haber proposiciones lógicamente verdaderas respecto a *algunos* constituyentes, de modo que la marea de refutaciones tan sólo pueda subir de nuevo si se añaden nuevos constituyentes extensibles. Si vamos a por todas, terminamos en el irracionalismo; pero no tenemos por qué hacerlo. Ahora bien, ¿dónde deberíamos trazar la frontera? Podemos aceptar perfectamente

la extensión de conceptos tan sólo para un determinado sub-conjunto de constituyentes que se conviertan así en el blanco principal de la crítica. La verdad lógica no dependerá de su significado.

SIGMA: Así que, después de todo, aceptamos la postura de Kapa: ¡hacemos la verdad independiente del significado de al menos *algunos* términos!

ZETA: Eso está bien. Pero si queremos vencer el escepticismo de Kapa y escapar a sus infinitudes viciosas, no cabe duda de que tenemos que dejar de extender conceptos en el punto en que ello deja de ser una herramienta de desarrollo para convertirse en una herramienta de destrucción. Hemos de hallar cuáles son los términos cuyo significado puede extenderse, a cambio de destruir los principios básicos de racionalidad[182].

KAPA: ¿Podemos extender los conceptos de su teoría de la racionalidad crítica? ¿O, acaso resultará manifiestamente verdadera, formulada en términos exactos e inextensibles que no precisan definición? ¿Acaso su teoría de la crítica termina en una «retirada al compromiso», todo resulta criticable a excepción de su teoría de la crítica, de su «metateoría»?[183]

OMEGA [*a Epsilon*]: No me gusta este paso de la Verdad a la racionalidad. ¿La racionalidad de *quién*? Me huele a infiltración convencionalista.

BETA: ¿De qué está usted hablando? Comprendo perfectamente el «patrón suave» de extensión de conceptos de Zeta. También comprendo que la extensión de conceptos puede atacar más de un término: lo hemos visto cuando Kapa extendió «extender» o cuando Gamma extendió «todos»…

SIGMA: ¡Sin duda Gamma extendió «simplemente conexo»!

BETA: Qué va; «simplemente conexo» es una abreviatura; él sólo extendió el término «todos» que aparece entre los términos definitorios[184].

ZETA: Volvamos a la cuestión. ¿No está usted contento con la extensión de conceptos «abierta» y radical?

BETA: No. Nadie aceptaría esta última variedad como una refutación genuina. Veo perfectamente que la tendencia suave en la extensión de conceptos, que Pi ha puesto de manifiesto, es un vehículo importantísimo de desarrollo matemático. ¡Pero los matemáticos nunca aceptarán esta última forma salvaje de refutación!

MAESTRO: Está usted equivocado, Beta. La aceptaron y su aceptación ha constituido un hito en la historia de las matemáticas. *¡Esta revolución en la historia de la crítica matemática ha cambiado el concepto de verdad matemática, ha cambiado las normas de la prueba matemática y ha cambiado los patrones del desarrollo matemático!*[185] Mas, terminemos por el momento nuestra discusión; ya discutiremos en otra ocasión esta nueva etapa.

SIGMA: Pero, entonces, nada queda establecido. No podemos detenernos *ahora.*

MAESTRO: Me parece bien lo que dice; esta última etapa tendrá importantes efectos retroactivos sobre nuestra discusión[186]. Sin embargo, una investigación científica «comienza y acaba con problemas»[187]. [*Abandona el aula.*]

BETA: ¡Pero yo no tenía problemas al principio y ahora no tengo *más que* problemas!

II

Introducción de los Editores

Más arriba[188], se ha aludido a la prueba de Poincaré de la conjetura de Descartes-Euler. En su tesis doctoral, Lakatos introducía un examen detallado de esta prueba, mediante una discusión de los argumentos en pro y en contra del enfoque «euclídeo» de las matemáticas. Algunas partes de esta discusión fueron incorporadas por Lakatos al capítulo I (véanse, por ejemplo, las págs. 68-74) y otras fueron redactadas de nuevo como partes del artículo «Infinite Regress and the Foundations of Mathematics» (Lakatos [1962]). Por consiguiente, omitimos aquí esta discusión introductoria.

Epsilon ha sido el abogado del programa euclídeo, del intento de suministrar a las matemáticas axiomas indubitablemente verdaderos expresados en términos perfectamente claros. La filosofía de Epsilon se pone en entredicho, aunque el Maestro señala que el modo más obvio y directo de atacar a Epsilon es pedirle que suministre una prueba de la conjetura de Descartes-Euler que satisfaga las normas euclídeas. Epsilon acepta el reto.

1. Traducción de la conjetura a los términos «perfectamente conocidos» del Álgebra vectorial. El problema de la traducción.

EPSILON: Acepto el reto. Probaré que todos los poliedros simplemente conexos con caras simplemente conexas son eulerianos.

MAESTRO: Sí, he enunciado este teorema en una lección anterior[189].

EPSILON: Como ya he señalado, he de hallar la verdad antes de probarla. Ahora bien, no tengo nada en contra de utilizar su método de pruebas y

refutaciones como un método para descubrir la verdad; pero, yo comienzo donde usted se detiene. Donde usted deja de mejorar, yo comienzo a probar[190].

ALFA: Sin embargo, este largo teorema está lleno de conceptos extensibles. No creo que nos resulte difícil refutarlo.

EPSILON: Encontrará usted que es imposible refutarlo. Fijaré el significado de cada uno de los términos.

MAESTRO: Adelante.

EPSILON: En primer lugar, utilizare tan sólo los conceptos más claros posibles. Puede que a veces podamos extender nuestro conocimiento perfecto para abarcar cámaras ópticas, papel y tijeras, pelotas de goma y bombas; pero *ahora* deberíamos olvidarnos de tales cosas. No cabe duda de que no se puede alcanzar la *finalidad* utilizando todas estas herramientas diversas. En mi opinión, nuestros fracasos anteriores están enraizados en la utilización de medios ajenos a la naturaleza simple y desnuda de los poliedros. La exuberante imaginación que movilizaba todos esos intrumentos está completamente mal orientada. Aducía elementos externos, ajenos y contingentes que no pertenecen a la esencia de los poliedros, por lo que no es de extrañar que falle para algunos poliedros. Para obtener una prueba perfecta, hay que restringir el rango de herramientas utilizadas[191]. Ello se debe a que esta imaginación exuberante hace que sea muy difícil alcanzar la *certeza*. Resulta difícil garantizar la verdad de los lemas que giran en torno a las propiedades de la goma, las lentes, etc. Deberíamos abandonar las tijeras, las bombas, las cámaras y similares, porque «para comprender una cuestión, hemos de abstraerla de todo lo superfluo, haciéndola lo más simple posible»[192]. Yo purgo mi teorema[193] y mi prueba de todas esas cosas, restringiéndolos a las más simples y fáciles[194]: a saber, a vértices, aristas y caras. No definiré *esos* términos, ya que no puede haber desacuerdo alguno acerca de su significado. Definiré cualquier término que sea mínimamente oscuro en términos «primitivos» perfectamente conocidos[195].

Ahora está claro que ninguno de los lemas específicos de ninguna de las pruebas era evidentemente verdadero; no eran más que conjeturas tales como «Todos los poliedros se pueden hinchar hasta que formen una bola» y demás. Mas ahora, «exijo que no se permita la entrada de conjetura de ningún tipo en

los juicios emitidos sobre la verdad de las cosas»[196]. Descompondré la conjetura en lemas que ya no son conjeturas, sino «intuiciones», es decir, «aprehensiones indubitables de una mente pura y atenta y que surgen a la luz de la razón»[197]. Algunos ejemplos de esas «intuiciones» son: *todos los poliedros poseen caras; todas las caras tienen aristas; todas las aristas tienen vértices.* No plantearé cuestiones como las de si un poliedro es un sólido o una superficie. Se trata de nociones vagas y, en cualquier caso, superfluas para lo que tenemos entre manos. Para mí, un poliedro consta de tres conjuntos: el conjunto de V vértices (los llamaré P^0_1, P^0_2…, P^0_V), el conjunto de A aristas (las llamaré P^1_1, P^1_2…, P^1_A) y el conjunto de C caras (que llamaré P^2_1, P^2_2…, P^2_C). Para caracterizar un poliedro, precisamos también algún tipo de tabla que nos diga qué vértices pertenecen a cada arista y qué aristas pertenecen a cada cara. A estas tablas las denominaré «matrices de incidencia».

GAMMA: Estoy un poco perplejo con su definición de poliedro. En primer lugar, puesto que se molesta en definir la noción de poliedro, concluyo que no la considera perfectamente conocida. Pero, entonces, ¿de dónde saca usted su definición? Ha definido usted el concepto oscuro de poliedro en términos de los conceptos «perfectamente conocidos» de caras, aristas y vértices. Mas, su definición (a saber, que el poliedro es un conjunto de vértices más un conjunto de aristas más un conjunto de caras más una matriz de incidencia), es obvio que no consigue captar la noción intuitiva de poliedro. Entraña, por ejemplo, que cualquier polígono es un poliedro, así como, por ejemplo, un polígono con una arista libre fuera de él. Ahora bien, puede usted elegir entre dos caminos. Puede usted decir que «el matemático no se ocupa del significado ordinario de sus términos técnicos… La definición matemática crea el significado matemático»[198]. En ese caso, definir la noción de poliedro equivale a abandonar la vieja noción completamente, sustituyéndola por un nuevo concepto. Mas, en ese caso, cualquier semejanza entre su «poliedro» y el poliedro genuino es completamente accidental y usted no obtendrá ningún conocimiento cierto acerca de los poliedros genuinos mediante el estudio de sus poliedros ficticios. El otro camino es mantenerse fiel a la idea de que definir es clarificar, de que la definición explicita los

aspectos esenciales y de que es una traducción o transformación que preserva el significado de un término en un lenguaje más claro. En este caso, sus definiciones son conjeturas que pueden ser verdaderas o pueden ser falsas. ¿Cómo puede usted tener una traducción ciertamente verdadera de un término vago a otros precisos?

EPSILON: Admito que me ha cogido usted por sorpresa con esa crítica. Pensaba que podría usted dudar de la verdad absoluta de mis axiomas y creía que podría usted preguntarme cómo son posibles esos juicios sintéticos *a priori*. Para ello, había preparado algunos contra-argumentos, pero no me esperaba un ataque en la línea de las definiciones. Pero, supongo que mi respuesta es: Obtengo mis definiciones del mismo modo que mis axiomas, por intuición. Realmente, poseen la misma condición: puede usted tomar mis definiciones como axiomas adicionales[199] o puede usted tomar mis axiomas como definiciones implícitas[200]. Suministran la esencia de los términos en cuestión.

MAESTRO: ¡Basta de filosofía! Veamos la prueba. No me gusta su filosofía, pero puede que me guste su prueba.

EPSILON: De acuerdo. Traduciré primero el teorema a demostrar a mi marco conceptual perfectamente simple y claro. Mis específicos términos indefinidos serán: vértices, aristas, caras y poliedros. A veces, me referiré a ellos llamándolos politopos cero, uni, di y tri-dimensionales[201], o brevemente, 0-politopos, 1-politopos, 2-politopos y 3-politopos.

ALFA: ¡Pero, tan sólo hace diez minutos definía usted poliedro en términos de vértices, aristas y caras!

EPSILON: Estaba equivocado. Esa «definición» era una anticipación estúpida. Di un salto a mi juicio con una precipitación tonta, la verdadera intuición, la verdadera interpretación, madura lentamente, por lo que purgar el alma de conjeturas lleva tiempo[202].

BETA: Hace un momento, mencionó usted algunos de sus axiomas, tales como: las caras *poseen* aristas o a cada cara le *corresponden* aristas; ¿acaso «corresponder a» es otro término primitivo?

EPSILON: No. Registro tan sólo los términos *específicos* de la teoría en cuestión, en este caso, la teoría de los poliedros, pero no los lógicos, los de

teoría de conjuntos o los aritméticos de la teoría subyacente, con los que supongo una perfecta familiaridad. Pero, permítaseme ahora ocuparme del término «simplemente conexo» que sin duda no es perfectamente claro. Definiré primero la simple conexión de los poliedros y luego la simple conexión de las caras. Tomaré primero la simple conexión de los poliedros. De hecho, constituye la abreviatura de una larga expresión: se dice que un poliedro es simplemente conexo (1) si todos los sistemas cerrados y sin bucles de aristas tienen un interior y un exterior y (2) si sólo hay un sistema de caras cerrado y sin bucles, que es el que separa el interior del exterior del poliedro. Ahora bien, esto está plagado de términos más bien vagos, como «cerrado», «interior», «exterior», etc. Pero los definiré todos en términos perfectamente conocidos.

GAMMA: Ha lanzado usted un exorcismo contra los términos mecánicos, como bombear y cortar, por considerarlos poco fiables; mas, ahora elimina usted los términos geométricos, como el de cerrado. Creo que está usted exagerando su celo purgativo. «Un sistema cerrado de aristas» constituye un concepto perfectamente claro que no precisa definición.

EPSILON: No, se equivoca usted. ¿Consideraría usted que un polígono estrellado constituye un sistema cerrado de aristas? Tal vez lo considere usted, puesto que no posee cabos sueltos, pero no «encierra» ningún área bien definida y algunos entenderán por «sistema cerrado de aristas» un sistema de aristas que haga tal cosa. Así pues, tiene usted que decidirse en uno u otro sentido y decir en cuál se ha decidido.

GAMMA: Un polígono estrellado puede no estar limitado, pero está obviamente *cerrado.*

EPSILON: Yo pienso que está no solamente cerrado, sino también limitado. El desacuerdo ya es significativo, pero presentaré más elementos de juicio. Me pregunto si aceptaría usted o no que el heptaedro sea un sistema cerrado de caras y que está limitado.

GAMMA: Nunca he oído nada acerca de su heptaedro.

EPSILON: Es un tipo de poliedro más bien interesante, puesto que sólo tiene un lado. No engloba ningún sólido geométrico y no divide el espacio en dos partes, un interior y un exterior. Alfa, por ejemplo, guiado por su «clara» intuición geométrica, dijo que un sistema cerrado de caras limita «si es la

frontera entre el interior del poliedro y el exterior del poliedro». Me pregunto si diría que la superficie del heptaedro no limita. ¿Acaso la familiaridad con el heptaedro cambiará su concepto de sistemas «limitadores»? En este caso, le pregunto con la mayor humildad: ¿puede la experiencia cambiar los conceptos *perfectamente* conocidos? No es posible tal cosa. Por tanto, «cerrado» y «limitado» no son perfectamente conocidos. Por consiguiente, voy a definirlos.

ZETA: Dibuje el heptaedro. Me pregunto cómo será.

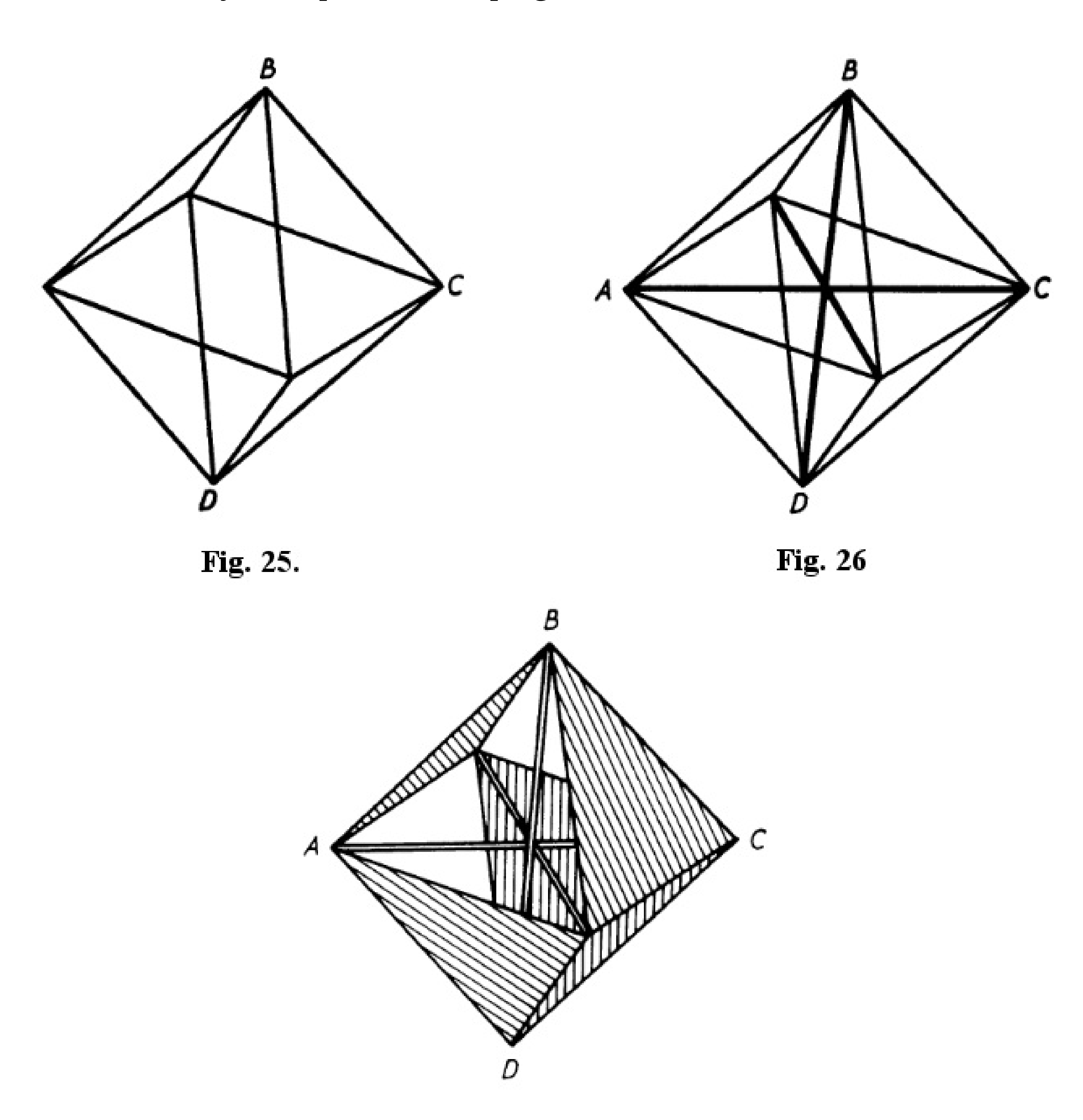


Fig. 25.

Fig. 26

Fig. 27[203].

EPSILON: De acuerdo. Comienzo con un octaedro familiar y ordinario (véase la fig. 25). Ahora le añado tres cuadrados en los planos que contienen las diagonales, por ejemplo, *ABCD* (fig. 26).

DELTA: Yo esperaría que en un poliedro decente sólo se encontrasen dos caras en cada arista. Aquí, tenemos tres.

EPSILON: Espere. Quito ahora cuatro triángulos a fin de satisfacer este requisito: de la primera mitad de la figura elimino el triángulo de arriba a la izquierda y el de abajo a la derecha. De la parte de atrás de la figura, quito el de abajo a la izquierda y el de arriba a la derecha. Así, sólo quedan los cuatro triángulos sombreados del diagrama (fig. 27). Hemos obtenido así una figura que consta de cuatro triángulos y tres cuadrados. He ahí el heptaedro[204]. Sus aristas y vértices son los originales del octaedro. Las diagonales del octaedro no son aristas de nuestra figura, sino líneas en las que se interseca a sí misma. No otorgo mucha importancia a la intuición geométrica, no estoy muy interesado en el hecho de que mi poliedro resulte estar tan inconfortablemente inmerso en el espacio tridimensional. Tal hecho no se pone de manifiesto en las matrices de incidencia de mi heptaedro. (Por cierto, el heptaedro se puede insertar perfectamente sin auto-intersección en el espacio de cinco dimensiones[205].)

Ahora bien, ¿limita la superficie del heptaedro? La respuesta es «no» si se define superficie como «limitadora» si y sólo si es la frontera del poliedro en el sentido de separar el interior del exterior del poliedro en cuestión. Por otro lado, la respuesta es «sí», si definimos la superficie como «limitadora» si y sólo si es la frontera del poliedro en el sentido de que contiene todas sus caras. Como usted ve, tiene que *definir* «limitar» y «frontera». Puede parecer que estos conceptos tienen un aire familiar antes de empezar a investigar la riqueza de las formas poliédricas, pero, en el transcurso de la investigación, los burdos conceptos originales se dividen y muestran una estructura fina, por lo que hay que definir cuidadosamente los conceptos, a fin de que quede claro en qué sentido se usan.

KAPA: ¡Y, entonces, tiene usted que poner un veto a futuras investigaciones, a fin de evitar nuevas divisiones!

MAESTRO: No haga caso a Kapa, Epsilon. Las refutaciones, inconsistencias y la crítica en general son muy importantes, aunque sólo si conducen a mejoras. *Una mera refutación no es una victoria.* Si la mera crítica, aunque correcta, poseyese autoridad, Berkeley hubiese detenido el desarrollo de las matemáticas y Dirac no hubiese hallado un editor de sus escritos.

EPSILON: No se preocupe, he desestimado inmediatamente las pegas sin interés de Kapa. Procedo ahora a definir mis términos, a traducirlo todo a mis escasos términos primitivos específicos: politopos y matrices de incidencia. Comenzaré definiendo «frontera». La frontera de un *k*-politopo es la suma de los (*k* - 1)-politopos que pertenecen a él, según las matrices de incidencia. A una suma de *k*-politopos la denominaré *k*-cadena. Por ejemplo, la «superficie» de un poliedro (o una de sus partes) es esencialmente una 2-cadena. Defino la frontera de una *k*-cadena como la suma de los (*k* - 1)-politopos que pertenecen a la *k*-cadena; pero, en vez de la suma ordinaria, tomo la suma *módulo* 2. Esto quiere decir que ocurrirá lo siguiente:

$$0 + 0 = 0, 1 + 0 = 1, 0 + 1 = 1, 1 + 1 = 0.$$

Tiene usted que ver que ésta es la *verdadera definición* de frontera de una *k*-cadena.

BETA: Deténgase un momento. Me resulta difícil seguir sus definiciones *k*-dimensionales. Déjeme pensar a voces sobre un ejemplo[206]. Por ejemplo, la frontera de una *cara* es, según su definición, el conjunto de aristas que le pertenecen. Ahora bien, cuando uno dos caras, la frontera común no contendrá las aristas que ambas contienen. Así, al sumar las aristas, omitiré aquellas que aparecen por parejas. Por ejemplo, tomo dos triángulos (fig. 28). La frontera del primero es $c + d + e$, la frontera del segundo, $a + b + e$, la frontera de ambos, $a + b + e + c + d + e = a + b + c + d$. Ahora veo por qué introdujo usted sumas *mód* 2 en su definición. Siga, por favor.

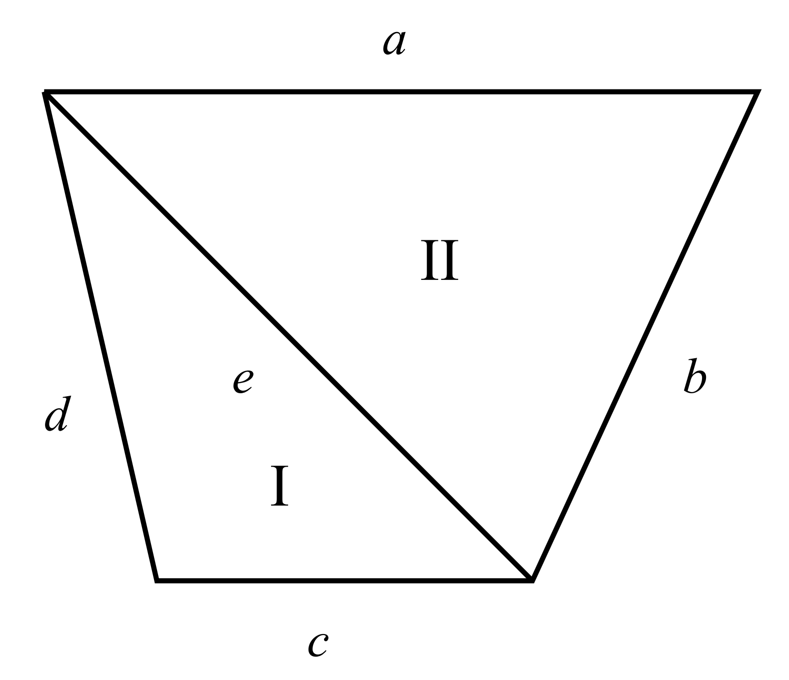


Fig. 28.

EPSILON: Tras haber definido «frontera» en términos específicos perfectamente conocidos, definiré ahora «cerrado». Hasta ahora, o bien tenía usted que confiar en una vaga intuición, o bien tenía que definir cerrado separadamente para cada caso: primero, cerrado para sistemas de aristas y luego, para sistemas de caras. Ahora, le voy a mostrar que existe un concepto general de cerrado, aplicable a cualquier *k*-cadena, independientemente de *k*. Denominaré *k*-cadena cerrada o, brevemente, *k*-circuito, a una *k*-cadena si, y sólo si, su frontera es cero.

BETA: Deténgase un momento. Déjeme ver: un polígono ordinario está intuitivamente cerrado y de hecho lo está, de acuerdo con su definición, puesto que su frontera es cero, ya que cada vértice aparece dos veces en la frontera, lo que da cero en su álgebra *mód* 2. Un poliedro ordinario y simple es cerrado y, de nuevo, su frontera es cero, puesto que en su frontera cada arista aparece dos veces.

KAPA [*aparte*]: ¡Realmente, Beta tiene que luchar para verificar las «intuiciones obvias e inmediatas» de Epsilon!

EPSILON: El siguiente término a dilucidar es el de «limitar». Diré que un *k*-circuito limita si es la frontera de una (k + 1)-cadena. Por ejemplo, el

«ecuador» de un poliedro esferoide limita, pero el «ecuador» de un poliedro toroide, no. En este último caso, la idea alternativa (es decir, que limita el «todo» del poliedro) queda excluida, ya que la frontera del todo del poliedro es vacía. Ahora está absolutamente claro que, por ejemplo, el heptaedro limita.

BETA: Va usted un poco aprisa, pero me parece que está usted en lo cierto.

GAMMA: ¿Puede usted probar que cualquier *k*-cadena limitadora es un circuito? Ha definido usted «limitar» sólo para circuitos; podría usted haberlo hecho en general para las cadenas. Supongo que la razón de su definición restringida es este teorema latente.

EPSILON: Es cierto; puedo probarlo.

GAMMA: Otra pregunta. Algunas cadenas son circuitos, algunos circuitos limitan. Esto me parece en orden. Pero, me parece que la frontera de una *k*-cadena decente debiera ser cerrada. Por ejemplo, no podría aceptar como poliedro un cubo al que le faltase la parte de arriba y no podría aceptar como polígono un cuadrado al que le faltase una arista. ¿Puede usted probar que la frontera de una *k*-cadena es cerrada?

EPSILON: ¿Que si puedo probar que la frontera de la frontera de cualquier *k*-cadena es cero?

GAMMA: Eso es.

EPSILON: No, no puedo. Es algo indudablemente verdadero; es un axioma. No hace falta probarlo.

MAESTRO: ¡Adelante, adelante! Supongo que ahora traducirá usted nuestro teorema a sus términos perfectamente conocidos.

EPSILON: Sí, brevemente, la traducción del teorema es: «*Todos los poliedros cuyos circuitos, todos ellos, limitan son eulerianos*». El término específico «poliedro» está sin definir; ya he definido «circuito» y «limitado» en términos perfectamente conocidos.

GAMMA: Se ha olvidado usted de la simple conexión de las caras. Usted ha traducido solamente la simple conexión del poliedro.

EPSILON: Se equivoca usted. Exijo que *todos* los circuitos limiten: incluso los 0-circuitos. He traducido «simple conexión de un poliedro» como «todos

los 1-circuitos y 2-circuitos limitan» y «simple conexión de las caras» como «todos los 0-circuitos limitan».

GAMMA: No le sigo. ¿Qué es un 0-circuito?

EPSILON: Una 0-cadena es cualquier suma de vértices. Un 0-circuito es cualquier suma de vértices cuya frontera sea cero.

GAMMA: ¿Pero qué es la frontera de un vértice? No hay politopos *menos* 1-dimensionales.

EPSILON: Por supuesto que los hay. O, más bien, hay uno: el conjunto vacío.

GAMMA: ¡Está usted loco!

ALFA: Puede que no esté loco. Está introduciendo una convención. No me preocupa qué herramientas conceptuales utilice. Veamos sus resultados.

EPSILON: No utilizo convenciones y mis conceptos no son «herramientas». El conjunto vacío *es* el politopo *menos* 1-dimensional. Su existencia es para mí más obvia ciertamente que la existencia, digamos, de su perro.

MAESTRO: ¡Nada de propaganda platónica, por favor! Muestre de qué modos sus «0-circuitos limitadores» traducen «caras simplemente conexas».

EPSILON: Una vez que usted se dé cuenta de que la frontera de cualquier vértice es el conjunto vacío, el resto no es nada. Según mi anterior definición, la frontera de un vértice es el conjunto vacío, pero la frontera de dos vértices es cero, debido al álgebra *mód* 2. La frontera de tres vértices es de nuevo el conjunto vacío, etc. Así, los números pares de vértices son circuitos, aunque los impares, no.

GAMMA: Así, su requisito de que los 0-circuitos debieran limitar equivale a exigir que cualquier par de vértices limiten una 1-cadena o, en román paladino, a exigir que cualquier par de vértices estén conectados mediante algún sistema de aristas. Por supuesto, esto elimina las caras anulares. Ciertamente, se trata del requisito que acostumbrábamos a llamar la «simple conexión de caras, tomadas separadamente».

EPSILON: Difícilmente podrá usted negar que mi lenguaje, que es el lenguaje *natural* que refleja la *esencia* de los poliedros, muestra por vez primera la profundamente enraizada identidad esencial de los criterios

anteriormente desconexos, aislados y *ad hoc*.

GAMMA [*aparte*]: ¡Lo que difícilmente podré negar es que estoy perplejo! Realmente, es más bien extraño que el camino hacia esta «simplicidad natural» esté infestada de tales complicaciones.

ALFA: Permítame comprobar si comprendo. ¿Dice usted que todos los vértices poseen la misma frontera: el conjunto vacío?

EPSILON: Exacto.

ALFA: Y, supongo que para usted «todos los vértices tienen el conjunto vacío» es una axioma, al estilo de «todas las caras tienen aristas» o «todas las aristas tienen vértices».

EPSILON: Exactamente.

ALFA: ¡Pero no es posible que esos axiomas sean del mismo jaez! El primero constituye una convención, mientras que los dos últimos son necesariamente verdaderos.

MAESTRO: El teorema ha sido traducido. Quiero ver la prueba.

EPSILON: Al punto, Señor. Permítame una ligera reformulación del teorema: *«Todos los poliedros en los que los circuitos y los circuitos limitadores coinciden son eulerianos».*

MAESTRO: Pruébelo.

EPSILON: Al punto, Señor. Lo replanteo[207].

BETA: Pero, ¿por qué? Ya ha traducido usted todos sus términos un poco oscuros a términos perfectamente conocidos.

EPSILON: Eso es verdad. Pero la traducción que voy a dar ahora es muy distinta. Traduciré el conjunto de mis términos primitivos a otro conjunto de términos primitivos que son aún más básicos.

BETA: ¡Así, que algunos de sus términos perfectamente conocidos son mejor conocidos que otros!

MAESTRO: Beta, no le ponga pegas constantemente a Epsilon. Fije su atención en lo que hace y no en cómo interpreta lo que hace. Adelante, Epsilon.

EPSILON: Si examinamos más detenidamente mi última formulación del teorema, veremos que es un teorema acerca del número de dimensiones de ciertos espacios vectoriales determinados por la matriz de incidencia.

BETA: ¿Qué?

EPSILON: Considere nuestro concepto de cadena, digamos una 1-cadena. Es esto:

$$x_1\theta_1 + x_2\theta_2 + \ldots + x_E\theta_E,$$

donde $\theta_1 \ldots \theta_E$ son las aristas y $x_1 \ldots x_E$ son o 0 o 1.

Es fácil ver que las 1-cadenas forman un espacio vectorial E-dimensional sobre el campo de clases residuales *módulo 2.* En general, las k-cadenas forman espacios vectoriales N_k-dimensionales sobre el campo de clases residuales *módulo* 2. (Donde N_k representa el número de k-politopos.) Los circuitos forman sub-espacios de los espacios cadena y los circuitos limitantes forman a su vez sub-espacios de los espacios circuito.

Así, de hecho, mi teorema dice que *«Si los espacios circuito y los espacios circuito limitantes coinciden, el número de dimensiones del espacio 0-cadena menos el número de dimensiones del espacio 1-cadena más el número de dimensiones del espacio 2-cadena es igual a 2».* Esta es la esencia del teorema de Euler.

MAESTRO: Me gusta esta reformulación que ha mostrado realmente la naturaleza de sus herramientas simples, tal y como usted nos prometió. Sin duda probará usted ahora el teorema de Euler por los métodos simples de álgebra vectorial. Veamos su prueba.

2. Otra prueba de la conjetura

EPSILON: Descompongo en dos partes mi teorema. La primera enuncia que los espacios circuito y los espacios circuito limitante coinciden si, y sólo si, coinciden los números de sus dimensiones. La segunda dice que si los espacios circuito y los espacios circuito limitante tienen las mismas dimensiones, entonces el número de dimensiones del espacio 1-cadena *más* el número de dimensiones del espacio 2-cadena es igual a 2.

MAESTRO: La primera parte es un teorema trivialmente verdadero del

álgebra vectorial. Pruebe la segunda parte.

EPSILON: Nada hay más fácil. Lo único que tengo que hacer es retrotraerme a las definiciones de los términos implicados[208]. Escribamos primero nuestras matrices de incidencia. Por ejemplo, tomemos las matrices de incidencia de un tetraedro *ABCD*, con aristas *AD*, *BD*, *CD*, *BC*, *AC*, *AB* y caras *BCD*, *ACD*, *ABD*, *ABC*. Las matrices son η^k_{ij} = 1 o 0, según que P^i_{k-1} pertenezca o no a P^j_k. Así, nuestras matrices son:

η^0	*A*	*B*	*C*	*D*
el conjunto vacío	1	1	1	1

η^1	*AD*	*BD*	*CD*	*BC*	*AC*	*AB*
A	1	0	0	0	1	1
B	0	1	0	1	0	1
C	0	0	1	1	1	0
D	1	1	1	0	0	0

η^2	*BCD*	*ACD*	*ABD*	*ABC*
AD	0	1	1	0
BD	1	0	1	0
CD	1	1	0	0
BC	1	0	0	1
AC	0	1	0	1
AB	0	0	1	1

η^3	*ABCD*
BCD	1
ACD	1
ABD	1

Ahora, con ayuda de estas matrices, los espacios circuito y los espacios circuito limitante se pueden caracterizar fácilmente. Ya hemos visto que las *k*-cadenas son realmente los vectores

$$\sum_{i=1}^{N_k} x_i P_i^k.$$

Definimos ahora la frontera de un P^k_j-politopo como

$$\sum_{i=1}^{N_{k-1}} \eta_{ij}^k P_i^{k-1}.$$

(Esto, así como las fórmulas que siguen, no es más que una reexposición de nuestra vieja definición en notación simbólica.)
La frontera de una *k*-cadena $\sum x_j P_j^k$ es

$$\sum_i \sum_j x_i \eta_{ij}^k P_i^{k-1}.$$

Ahora, una *k*-cadena $\sum x_j P_j^k$ es un *k*-circuito si, y sólo si,
(1) $\sum \eta_{ij}^k x_j = 0$ para cada *i*.
Una *k*-cadena $\sum x_j P_j^k$ es un *k*-circuito limitante si, y sólo si, es la frontera de alguna (*k* + 1)-cadena $\sum y_m P_m^{k+1}$, es decir, si y sólo si existen coeficientes y_m (m = 1…, N_{k+1}), tales que
(2) $x_j = \sum y_m \eta_{jm}^{k+1}$.

Es obvio ahora que el espacio circuito y el espacio circuito limitante son idénticos si, y sólo si, el número de sus dimensiones es idéntico; es decir, si, y sólo si, el rango del número de soluciones independientes de las N_{k-1} ecuaciones lineales homogéneas (1) es igual al número de soluciones

independientes del sistema de ecuaciones lineales inhomogéneas (2). Ahora bien, según los teoremas de sobra conocidos del álgebra lineal, el primer número es $N_k - \rho_k$ donde ρ_k es el rango de $\| \eta_{ij} \|$; el segundo número es ρ_{k+1}.

Así, lo único que tengo que probar es que si $N_k - \rho_k = \rho_{k+1}$, entonces $V - A + C = 2$.

LAMBDA: O, «Si $N_k = \rho_k + \rho_{k+1}$, entonces $N_0 - N_1 + N_2 = 2$». N_k son dimensiones de ciertos espacios vectoriales; ρ_k los rangos de ciertas matrices. Ya no se trata de un teorema acerca de los poliedros, sino acerca de determinado conjunto de espacios vectoriales multidimensionales.

EPSILON: Ya veo que acaba usted de despertarse. Mientras usted estaba dormido, analicé nuestros conceptos de poliedro y mostré que son *realmente* conceptos de álgebra vectorial. He traducido el círculo de ideas del fenómeno de Euler al álgebra vectorial, mostrando así su esencia. Ahora, ciertamente, estoy probando un teorema de álgebra vectorial, que constituye una teoría clara y precisa, con términos perfectamente conocidos, axiomas limpios e indubitables, así como con pruebas también indubitables. Por ejemplo, considere la nueva prueba trivial de nuestro tan discutido teorema: Si $N_k = \rho_k + \rho_{k+1}$, entonces $N_0 - N_1 + N_2 = \rho_0 + \rho_1 - \rho_1 - \rho_2 + \rho_2 + \rho_3 = 1 + 1 = 2$. ¿Quién osaría dudar de la certeza de este teorema? Así pues, he probado el controvertido teorema de Euler con indudable certeza[209].

ALFA: Pero, fíjese, Epsilon; si hubiésemos aceptado la concepción rival de que los vértices no poseen frontera, la matriz η^0, por ejemplo en el caso del tetraedro, hubiera sido

η^0	A	B	C	D
	0	0	0	0

El rango ρ_0 hubiera sido 0 y, consiguientemente, $V - A + C = \rho_0 + \rho_3 = 1$. ¿No cree usted que su «prueba» descansa demasiado en una convención? ¿Acaso no eligió usted su convención tan sólo para salvar el teorema?

EPSILON: Mi axioma relativo a ρ_0 no era una «convención». $\rho_0 = 1$ posee en mi lenguaje el mismísimo significado real de que un par de vértices limita,

de que el entramado de aristas es conexo (con lo que se excluyen las caras anulares). La expresión «convención» es patentemente confundente. Para poliedros con caras simplemente conexas, $\rho_0 = 1$ es *verdadero* y $\rho_0 = 0$ es falso.

ALFA: ¡Mmm! Usted parece estar diciendo que tanto $\rho_0 = 1$ como $\rho_0 = 0$ caracterizan cierta estructura en espacios vectoriales. La diferencia es que $\rho_0 = 1$ tiene un modelo real en los poliedros con caras simplemente conexas, mientras que el otro no.

3. Algunas dudas relativas al carácter final de la prueba. El procedimiento de traducción y el enfoque esencialista de las definiciones frente al enfoque nominalista.

MAESTRO: En cualquier caso, hemos obtenido la nueva prueba. ¿Es, con todo, final?

ALFA: No lo es. Tomemos este poliedro (fig. 29). Posee dos caras anulares, delante y atrás, y puede inflarse hasta formar un toro. Además, posee 16 vértices, 24 aristas y 10 caras. Así, $V - A + C = 16 - 24 + 10 = 2$. Es euleriano aunque dista de ser simplemente conexo.

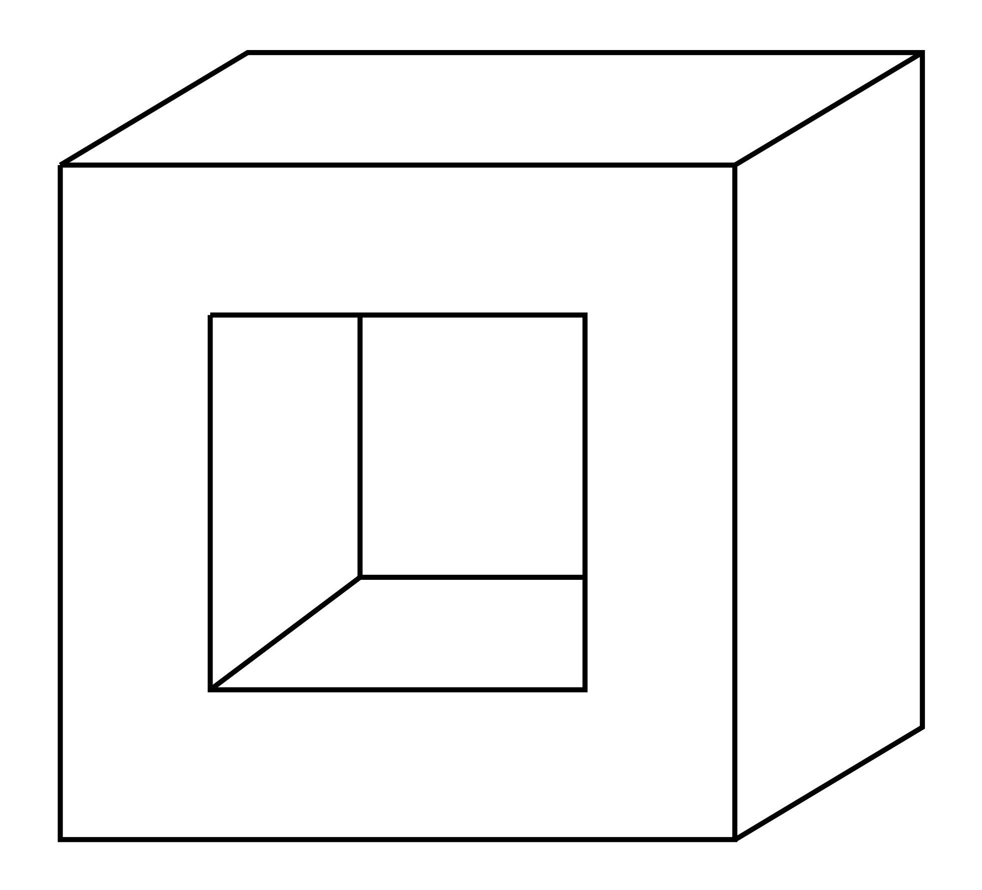


Fig. 29.

BETA: No creo que eso sea un caso del fenómeno Euler Descartes. Es un caso del fenómeno Lhuilier; es decir, *para un poliedro con k túneles y m caras anulares,* $V - A + C = 2 - 2k + m$[210]. Para cualquier poliedro como éste con el doble de caras anulares y túneles, $V - A + C = 2$; pero eso no quiere decir que sea euleriano. Además, este fenómeno Lhuilier explica inmediatamente por qué no podíamos obtener fácilmente una condición necesaria y suficiente (o teorema maestro) para la conjetura de Euler-Descartes, puesto que estos casos de Lhuilier se inmiscuían entre los eulerianos[211].

MAESTRO: Pero, Epsilon nunca prometió la finalidad, sino tan sólo mayor profundidad de la que habíamos obtenido antes. Ha satisfecho ahora su promesa de producir una prueba que explique de un golpe tanto el carácter euleriano de los poliedros ordinarios, como el carácter euleriano de los poliedros estrellados.

LAMBDA: Es verdad. Tradujo el requisito de que las caras fuesen

simplemente conexas (es decir, que en el proceso de triangulación cada nueva diagonal crease una nueva cara) de tal modo que la idea de triangulación desapareciese completamente de él. En esta nueva traducción, una cara es simplemente conexa si todos los circuitos de vértices limitan en ella, ¡requisito que se cumple para los poliedros estrellados eulerianos! Además, mientras que tenemos dificultades a la hora de aplicar a los poliedros estrellados el concepto intuitivo (es decir, no-*estrellado*-intuitivo) de simplemente conexo, debido a Jordan, en la traducción de Poincaré desaparecen estas dificultades. Los poliedros estrellados, así como los ordinarios, son conjuntos de vértices, aristas y caras más una matriz de incidencia; no nos ocupamos del problema de la realización de un poliedro en un espacio que resulte ser nuestro espacio tridimensional y material, aproximadamente euclídeo. El pequeño dodecaedro estrellado, por ejemplo, no es euleriano y no resulta muy difícil trazar en él 1-circuitos que no limiten.

BETA: Encuentro que esto también es interesante en otro aspecto. La prueba de Epsilon resulta inmediatamente más rigurosa y de más alcance. ¿Existe una conexión entre ambas cosas?

EPSILON: No lo sé. Pero, mientras que nuestro Maestro pretende que mi prueba sólo posee *más profundidad*, yo pretendo que posee *absoluta certeza.*

KAPA: Su teorema es tan susceptible de ser refutado mediante alguna extensión de conceptos imaginativa como cualquier conjetura anterior.

EPSILON: Está usted equivocado, Kapa, como le explicaré[212].

ALFA: Antes de ello, déjeme plantear otra cuestión relativa a su prueba o, más bien, relativa al carácter final y cierto que usted le atribuye. ¿Es de hecho el poliedro un modelo de su estructura algebraica-vectorial? ¿Está usted seguro de que su traducción de «poliedro» a la teoría vectorial es una *verdadera* traducción?

EPSILON: Ya he dicho que es verdadera. Si hay algo que le sorprenda, eso no es razón para dudar. «Yo sigo la gran escuela de los matemáticos que, en virtud de una serie de sorprendentes definiciones, han salvado las matemáticas de los escépticos y han suministrado una demostración rígida de sus proposiciones»[213].

MAESTRO: Realmente, pienso que este método de traducción constituye el

meollo de la cuestión de la certeza y carácter final de la prueba de Epsilon. Creo que podríamos denominarlo el *procedimiento de traducción.* Pero, veamos, ¿hay más dudas?

GAMMA: Sólo una más. Digamos que acepto que su deducción es infalible. ¿Está usted seguro de que no puede deducir de sus premisas la negación de su teorema con la misma infalibilidad?

EPSILON: Todas mis premisas son verdaderas. ¿Cómo podrían ser inconsistentes?

MAESTRO: Aprecio sus dudas, pero yo siempre prefiero *un* contraejemplo a cualquier colección de dudas.

GAMMA: Me pregunto si mi cilindro no refutará este nuevo teorema.

EPSILON: Por supuesto que no. En el cilindro, el conjunto vacío no limita y, consiguientemente, $\rho_0 \neq 1$.

GAMMA: Ya veo. Está usted en lo cierto. Este argumento, puesto en sus términos perfectamente familiares, claros y distintos, me ha convencido inmediatamente.

EPSILON: ¡Comprendo su sarcasmo! En una ocasión anterior puso usted en tela de juicio mis definiciones. Entonces le dije que eran de hecho axiomas indubitablemente verdaderos que expresan la esencia de los conceptos en cuestión, con la ayuda de la intuición infaliblemente clara y distinta. He pensado en ello desde entonces y creo que debo abandonar mi concepción aristotélica de las definiciones. Cuando defino un término vago, de hecho lo sustituyo por otro nuevo, sirviendo el viejo tan sólo como una *abreviatura* del nuevo.

ALFA: Permítame aclarar esto. ¿Qué entiende usted por «definición», una sustitución que constituye una operación de la izquierda a la derecha o una abreviatura que constituye una operación de la derecha a la izquierda?

EPSILON: Entiendo la abreviatura. Me olvido del viejo significado. Creo libremente el significado de mis nuevos términos, a la vez que tacho los viejos términos vagos. También creo libremente mis problemas, a la vez que tacho los viejos y oscuros.

ALFA: No puede usted evitar ser un extremista; pero, siga.

EPSILON: Mediante este cambio en mi programa, gano con certeza una

cosa: una de sus dudas queda con ello eliminada. Si las definiciones son abreviaturas, entonces no pueden ser falsas.

ALFA: Pero, pierde usted algo que es mucho más importante. Tiene usted que restringir su programa euclídeo a las teorías con conceptos perfectamente conocidos y, cuando quiera usted incluir teorías con conceptos vagos en el ámbito de ese programa, no podrá usted hacerlo con su técnica de traducción. Como ha dicho usted, no traduce, sino que más bien crea un nuevo significado. Pero, aun cuando intentase usted *traducir* el viejo significado, algunos aspectos esenciales del concepto vago original podrían perderse en esa traducción. Puede que el nuevo concepto claro no sirva para la solución del problema al que se orientaba el viejo concepto[214]. Si considera usted infalible su traducción o si deroga usted conscientemente el viejo significado, ambos extremos arrojarán el mismo resultado: puede usted relegar el problema original al limbo de la historia del pensamiento, cosa que de hecho no desea usted hacer[215]. Así que, si se tranquiliza usted, tendrá que admitir que la definición debe tener un toque de esencialismo modificado: ha de preservar algunos aspectos relevantes del viejo significado, debe transferir elementos relevantes del significado de la izquierda a la derecha [216].

BETA: Pero, aunque Epsilon acepte este esencialismo modificado de la definición, el abandono del enfoque esencialista seguirá siendo una gran retirada de su programa euclídeo original. Epsilon dice ahora que hay teorías euclídeas con términos perfectamente conocidos e inferencias infalibles, como la aritmética, la geometría, la lógica y la teoría de conjuntos, supongo. Ahora hace que el programa euclídeo consista en traducir teorías no-euclídeas con términos oscuros y vagos, así como con inferencias inciertas, como el cálculo y la teoría de la probabilidad, a estas teorías ya euclídeas, abriendo así nuevas avenidas de desarrollo tanto para las teorías subyacentes como para las teorías originalmente no-euclídeas.

EPSILON: Denominaré *teoría dominante* a esa teoría «ya euclídea» o teoría establecida.

GAMMA: Me pregunto cuál es el campo de aplicabilidad de este programa restringido. Ciertamente, no abarcará la física: nunca traducirá la mecánica ondulatoria a la geometría. Epsilon quería «salvar las matemáticas de los escépticos, en virtud de una serie de definiciones sorprendentes»[217], pero lo

que ha salvado a lo sumo son algunas migajas.

BETA: Tengo un problema relativo a esas definiciones traductoras. Parecen ser meras abreviaturas de la teoría dominante y así ser verdaderas «por definición». Pero, parecen ser falsables, si consideramos que se refieren al dominio no-euclídeo[218].

EPSILON: Está bien.

BETA: Sería interesante ver cómo se falsan tales definiciones.

ZETA: Me gustaría que volviésemos ahora a la discusión relativa al problema de la infalibilidad de la deducción de Epsilon. Epsilon, ¿sigue usted pretendiendo que su teorema sea cierto?

EPSILON: Ciertamente.

ZETA: ¿Así, que no puede usted imaginar un contraejemplo?

EPSILON: Como le he dicho a Kapa, mi prueba es infalible. No tiene contraejemplos.

ZETA: ¿Quiere usted decir que eliminaría los contraejemplos, tildándolos de monstruos?

EPSILON: Ni siquiera un monstruo puede refutarla.

ZETA: ¿Así que pretende usted que su teorema seguirá siendo verdadero, aun cuando yo ponga cualquier cosa en el lugar de sus términos perfectamente conocidos?

EPSILON: Puede usted poner lo que sea en el lugar de los términos perfectamente conocidos *específicos* del álgebra vectorial.

ZETA: ¿No puedo sustituir sus términos primitivos no específicos, como «todos», «y», «2», etc.?

EPSILON: No. Pero puede usted poner cualquier cosa en lugar de mis términos perfectamente conocidos *específicos*, como «vértice», «arista», «cara», etc. Pienso que con esto he clarificado lo que entiendo por refutación.

ZETA: Lo ha hecho usted; mas, entonces, o puede usted ser refutado o no ha hecho usted lo que creía hacer.

EPSILON: No comprendo su oscura intuición.

ZETA: Lo hará, si es que lo desea. Su caracterización de la idea de contraejemplo parece razonable. Pero, si es eso lo que constituye un contraejemplo, entonces el significado de sus «términos perfectamente

conocidos» es inesencial. Y, si lo que usted dice está justificado, ese es precisamente el mérito de su prueba. Una prueba, si es que es irrefutable, no descansa en el significado de los «términos perfectamente conocidos» específicos, de acuerdo con la propia idea de prueba irrefutable. Así, el peso de la prueba, si es que está usted en lo cierto, lo soporta plenamente el significado de los términos subyacentes no específicos; en este caso, la aritmética, la lógica, la teoría de conjuntos, y no en absoluto el significado de sus términos específicos.

A tales pruebas, las denominaré *pruebas formales*, puesto que no dependen en absoluto del significado de los términos específicos. Ciertamente, el *grado de formalidad* depende de los términos no específicos. El carácter perfectamente conocido de esos términos, que denominaré términos formativos, resulta realmente importante. Fijando su significado, podemos enunciar qué es lo que se puede aceptar como contraejemplo y qué es lo que no. Podemos así regular la marea de contraejemplos. Si no hay contraejemplos del teorema, diremos que el teorema es una *tautología*, en nuestro caso, una tautología aritmético-teórico conjuntista.

ALFA: Parece que tenemos una buena gama de tautologías, según la elección que hagamos de las constantes cuasi-lógicas. Pero, veo aquí un montón de problemas. Primero, ¿cómo sabemos que una tautología es una tautología?

KAPA: *Nunca lo sabrá usted* por encima de toda sospecha. Pero, si tiene usted *serias* dudas acerca de una teoría dominante, elimínela y sustitúyala por otra teoría dominante[219].

Nota de los Editores

Esta sección del diálogo termina aquí en la tesis de Lakatos. Nosotros hubiéramos intentado persuadir a Lakatos para que continuase el diálogo en la siguiente dirección:

ZETA: Pero, de lo que se acaba de decir, parece seguirse que podemos fraguar nuestras pruebas en sistemas en los que la teoría dominante sea la lógica. Así, en tanto en cuanto no tengamos serias dudas acerca de la lógica,

podremos asegurar la infabilidad de nuestras deducciones, arrojando toda duda, no sobre la prueba misma, sino sobre los lemas, sobre los antecedentes del teorema.

EPSILON: Me alegra que por fin Zeta haya captado la cuestión. De hecho, mi prueba puede fraguarse en un sistema en el que la teoría dominante sea la lógica. En este sistema se puede probar el enunciado condicional con todos los lemas incorporados como antecedentes y sabemos que (relativamente al conjunto dado de términos «lógicos» formativos) *no hay* contraejemplos de un enunciado que se pueda probar de este modo. Reinterprétense como se reinterpreten los términos descriptivos, este enunciado condicional seguirá siendo siempre verdadero.

LAMBDA: ¿Cómo lo «sabemos»?

EPSILON: No lo sabemos *con certeza;* se trata de un teorema informal acerca de la lógica. Pero, sabemos además que si se nos presenta una pretendida prueba en tal sistema, podemos comprobar de un modo totalmente mecánico, mediante un procedimiento que garantiza la producción de una respuesta en un número finito de pasos, si es realmente o no una prueba. Así, pues, en tales sistemas, su «análisis de la prueba» se reduce a una trivialidad.

ALFA: Pero, estará usted de acuerdo, Epsilon, en que el «análisis de la prueba» conserva su importancia en matemáticas informales, en que las pruebas formales son siempre traducciones de pruebas informales y en que los problemas planteados acerca de la traducción son muy reales.

LAMBDA: Pero, en cualquier caso, Epsilon, ¿cómo sabemos que la comprobación de la prueba es siempre precisa?

EPSILON: Realmente, Lambda, su insaciable sed de certeza se está haciendo pesada. ¿Cuántas veces he de decirle que no sabemos nada con certeza? Sin embargo, su deseo de certeza le está haciendo plantear problemas la mar de aburridos y le ciega para los importantes.

APÉNDICE 1

OTRO EJEMPLO DEL MÉTODO DE PRUEBAS Y REFUTACIONES

1. La defensa de Cauchy del «Principio de Continuidad»

El método de conjeturas y refutaciones constituye un patrón heurístico muy general de descubrimiento matemático. Con todo, al parecer, sólo fue descubierto en los años 1840, e incluso hoy día les parece paradójico a muchas personas. Realmente, en ningún sitio se reconoce plenamente. En este apéndice, trataré de bosquejar el caso de un análisis de la prueba en análisis matemático, así como de dibujar las fuentes de resistencia de su reconocimiento y comprensión. Repito, antes que nada, el esqueleto del método de pruebas y refutaciones, método que ya he ilustrado en mi ejemplo de la prueba que dio Cauchy de la conjetura de Descartes-Euler.

Hay un patrón simple de descubrimiento matemático o del desarrollo de las teorías matemáticas informales. Consta de los siguientes estadios[220]:

(1) *Conjetura primitiva.*

(2) *Prueba (un experimento mental o argumento aproximado, que descompone la conjetura primitiva en subconjeturas o lemas).*

(3) *Surgen contraejemplos «globales» (contraejemplos de la conjetura primitiva).*

(4) *Se reexamina la prueba: el «lema culpable», respecto al que el contraejemplo global es un contraejemplo «local», queda identificado. Puede que este lema culpable baya permanecido «oculto» anteriormente o puede que no baya sido correctamente identificado. Ahora se explícita y se*

incorpora como condición a la conjetura primitiva. El teorema (la conjetura mejorada) supera a la conjetura primitiva con el nuevo concepto generado por la prueba como su aspecto nuevo supremo[221].

Estos cuatro estadios constituyen el meollo esencial del análisis de la prueba, aunque existen algunos otros estadios normales que aparecen con frecuencia:

(5) *Se examinan pruebas de otros teoremas por si el lema recientemente descubierto o el nuevo generado por la prueba apareciese en ellos. Puede que se descubra que este concepto se encuentra en las encrucijadas de diversas pruebas, emergiendo así su importancia básica.*

(6) *Se comprueban las consecuencias aceptadas basta el momento de la conjetura original ya refutada.*

(7) *Los contraejemplos se convierten en ejemplos nuevos, se abren nuevos campos de investigación.*

Me gustaría considerar ahora otro ejemplo. Aquí, la *conjetura primitiva* es que el límite de una serie convergente de funciones continuas es a su vez continuo. Cauchy fue el que dio por vez primera una prueba de esta conjetura, cuya verdad se había dado por supuesta en el siglo dieciocho, suponiéndose, por tanto, que no precisaba ninguna demostración. Se consideraba como el caso especial del «axioma», según el cual «lo que es verdadero hasta el límite es verdadero en el límite»[222]. Encontramos la conjetura y su prueba en el célebre escrito de Cauchy de [1821] (pág. 131).

Dado que la «conjetura» se había considerado hasta entonces como trivialmente verdadera, ¿por qué sintió Cauchy la necesidad de probarla? ¿Acaso alguien había criticado la conjetura?

Como veremos, la situación no era tan sencilla como parece. Gracias a la visión retrospectiva de las cosas, podemos observar ahora que los contraejemplos de la conjetura de Cauchy habían sido suministrados por la obra de Fourier. La *Mémoire sur la Propagation de la Chaleur* de Fourier[223] contiene de hecho un ejemplo de lo que, según las nociones actuales, es una serie convergente de funciones continuas que tiende hacia una función discontinua de Cauchy; a saber:

$$\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \cdots$$

Con todo, la actitud del propio Fourier ante esta serie es completamente clara (y claramente distinta de la moderna):

(*a*) Enuncia que es convergente en todo punto.

(*b*) Enuncia que su función límite se compone de líneas rectas separadas, cada una de las cuales es paralela al eje de las *x* e igual a la circunferencia. Estas paralelas están alternativamente situadas por encima y por debajo del eje, con una distancia de $\pi/4$ entre dos de ellas, estando unidas por perpendiculares que forman a su vez parte de la línea[224].

Las palabras de Fourier acerca de las perpendiculares de la gráfica son reveladoras. Consideraba que estas funciones límite eran (en cierto sentido) continuas. De hecho, Fourier consideraba con toda certeza que algo era una función continua si su gráfica se podía trazar con un lápiz sin levantarlo del papel. Así, pues, Fourier no podría haber pensado que construía contraejemplos del axioma de continuidad de Cauchy[225]. Tan sólo a la luz de la subsiguiente caracterización que hizo Cauchy de la continuidad se comenzaron a considerar discontinuas las funciones límite de algunas series de Fourier y, así, las propias series comenzaron a considerarse como contraejemplos de la conjetura de Cauchy. Dada esta nueva y anti-intuitiva definición de la continuidad, los inocentes dibujos continuos de Fourier parecieron convertirse en endiablados contraejemplos del viejo y bien establecido principio de continuidad.

No cabe duda de que la definición de Cauchy tradujo el concepto familiar de continuidad al lenguaje aritmético de manera tal que el «sentido común ordinario» no podía sino asombrarse[226]. ¿Qué clase de continuidad es esa, que si rotamos un poco el gráfico de una función continua se convierte en discontinua?[227]

Así, si sustituimos el concepto intuitivo de continuidad por el de Cauchy, entonces (¡y sólo entonces!) el axioma de continuidad parece quedar contradicho por los resultados de Fourier. Todo esto parece como un argumento poderoso y tal vez decisivo en contra de las nuevas definiciones de Cauchy (no sólo de continuidad, sino también de otros conceptos, como el

de límite). No es entonces de extrañar que Cauchy desease mostrar que podía probar realmente el axioma de continuidad en su nueva interpretación del mismo, suministrando con ello la evidencia de que su definición satisfacía el más exigente requisito de adecuación. Consiguió suministrar la prueba y creyó que con ello había dado un golpe mortal a Fourier, ese aficionado de talento, aunque confuso y carente de rigor, que había puesto en entredicho inintencionadamente su definición.

Por supuesto, si la prueba de Cauchy fuese correcta, entonces los ejemplos de Fourier, a pesar de las apariencias, no hubieran podido constituir *contra*ejemplos reales. Una manera de mostrar que no eran contraejemplos reales hubiera sido mostrar que no eran en absoluto convergentes aquellas series que aparentemente convergían en funciones que eran discontinuas en sentido de Cauchy.

Se trataba de una intuición plausible. El propio Fourier tenía dudas acerca de la convergencia de sus series en esos casos críticos. Constató que la convergencia era lenta: «La convergencia no es lo suficientemente rápida como para producir una aproximación fácil, aunque es suficiente para la verdad de la ecuación»[228].

Retrospectivamente, podemos ver que la esperanza de Cauchy en que en estos casos críticos las series de Fourier no convergiesen (con lo que no representarían la función) estaba en cierto modo justificada por el hecho siguiente. Donde la función límite es discontinua, la serie tiende a $\frac{1}{2}[f(x + 0) + f(x - 0)]$, y no simplemente a $f(x)$. Tiende a $f(x)$ tan sólo si $f(x) = \frac{1}{2}[f(x + 0) + f(x - 0)]$. Pero eso no se sabía antes de 1829 y, de hecho, la opinión general estaba al principio a favor de Fourier más bien que a favor de Cauchy. Las series de Fourier parecían funcionar y, cuando Abel, en 1826, cinco años después de la publicación de la prueba de Cauchy, mencionó en una nota de su [1826][229], que hay «excepciones» al teorema de Cauchy, ello constituyó una doble victoria más bién intrigante: se aceptaban las series de Fourier, aunque también la sorprendente definición de continuidad de Cauchy, así como el teorema que había probado mediante ella.

Fue precisamente a la luz de esta doble victoria cuando pareció que debía haber *excepciones* a la versión específica del principio de continuidad que estamos considerando, aun cuando Cauchy lo hubiese probado

impecablemente.

Cauchy tiene que haber llegado a la misma conclusión que Abel, ya que en el mismo año, sin abandonar, naturalmente, su caracterización de la continuidad, dio una prueba de la convergencia de las series de Fourier[230]. Con todo, debió de sentirse en una posición muy incómoda. El segundo volumen del *Cours d'Analyse* nunca se publicó. Y, lo que resulta aún más sospechoso, no sacó más ediciones del primer volumen, permitiendo que su alumno Moigno publicase sus notas de clase, una vez que la demanda de un libro de texto se hubiera hecho demasiado grande[231].

Dado que los ejemplos de Fourier se interpretaban ahora como contraejemplos, el rompecabezas era evidente: ¿cómo podía ser falso o «sufrir» excepciones un teorema probado? Ya hemos discutido cómo la gente estaba perpleja en el mismo período con las «excepciones» del teorema de Euler, a pesar del hecho de haber sido probado.

2. La prueba de Seidel del concepto generado por la prueba de convergencia uniforme

Todo el mundo presentía que este caso de Cauchy-Fourier no era simplemente un rompecabezas inocuo, sino que constituía un defecto fatal en el conjunto de las nuevas matemáticas «rigurosas». Dirichlet, en sus celebrados artículos sobre las series de Fourier[232], no mencionaba en absoluto la obvia contradicción, preocupándose por resolver exactamente *cómo* representan funciones discontinuas las series convergentes de funciones continuas, a la vez que, como es obvio, era perfectamente consciente de la versión del principio de continuidad debida a Cauchy.

A Seidel le correspondió finalmente resolver el enigma, identificando el lema oculto culpable en la prueba de Cauchy[233]. Mas eso no ocurrió hasta el año 1847. ¿Por qué llevó tanto tiempo? Para responder esta pregunta, deberemos echar un vistazo más de cerca al célebre descubrimiento de Seidel.

Sea $\sum f_n(x)$ una serie convergente de funciones continuas y, para cualquier *n*, defínase $S_n(x) = \sum_{m=0}^{n} f_m(x)$ y $r_n(x) = \sum_{m=n+1}^{\infty} f_m(x)$.

Entonces, el *quid* de la prueba de Cauchy es la inferencia de la premisa:

Dado un $\varepsilon > 0$:

(1) hay un δ tal que, para cualquier b, si $|b| < \delta$, entonces $|S_n(x + b) - S_n(x)| < \varepsilon$ (existe tal δ, debido a la continuidad de $S_n(x)$);

(2) hay un N tal que $|r_n(x)| < \varepsilon$, para todo $n = N$ (existe tal N, debido a la convergencia de $\sum f_n(x)$);

(3) hay un N' tal que $|r_n(x + b)| < \varepsilon$, para todo $n = N'$ (existe tal N', debido a la convergencia de $\sum f_n(x + b)$);

a la conclusión:

$$\begin{aligned} |f(x+b) - f(x)| &= |S_n(x+b) + r_n(x+b) - S_n(x) - r_n(x)| \\ &\leqslant |S_n(x+b) - S_n(x)| + |r_n(x)| + |r_n(x+b)| < 3\epsilon, \end{aligned}$$

para todo $b < \delta$.

Ahora bien, los contraejemplos globales suministrados por las series de funciones continuas que convergen a las funciones discontinuas de Cauchy muestran que algo anda mal en este argumento (enunciado *grosso modo*). Mas, ¿dónde está el lema culpable?

Un análisis de la prueba ligeramente más cuidadoso (utilizando los mismos símbolos que antes, aunque explicitando las dependencias funcionales de algunas de las cantidades) suministra la siguiente inferencia:

(1') $|S_n(x + b) - S_n(x)| < \varepsilon$, si $b < \delta(\varepsilon, x, n)$

(2') $|r_n(x)| < \varepsilon$, si $n > N(\varepsilon, x)$

(3') $|r_n(x + b)| < \varepsilon$, si $n > N(\varepsilon, x + b)$,

por tanto,

$$|S_n(x+b) + r_n(x+b) - S_n(x) - r_n(x)| = |f(x+b) - f(x)| < 3\epsilon,$$

si $n > \text{máx}_z\, N(\varepsilon, z)$ y $b < \delta(\varepsilon, x, n)$.

El lema oculto es que este máximo, $\text{máx}_z\, N(\varepsilon, z)$, deba existir para cualquier ε fijado. Esto es lo que se llegó a denominar el requisito de *convergencia uniforme.*

Existían probablemente tres impedimentos importantes para llegar a este descubrimiento.

El *primero* de ellos era el uso vago que hacía Cauchy de cantidades «infinitamente pequeñas»[234]. El *segundo* era que, aunque algunos matemáticos hubiesen notado que en esta prueba está implicada la suposición de la existencia de un máximo de un conjunto infinito de *N*, podrían haberlo hecho perfectamente sin reparar en ello. Las pruebas de existencia en problemas de máximos aparecen por vez primera en la escuela de Weierstrass. Mas, el *tercer* y principal obstáculo era el dominio de la metodología euclídea, este mal y buen espíritu de las matemáticas de comienzos del diecinueve.

Pero, antes de discutir esto en general, veamos cómo resuelve Abel el problema planteado al teorema de Cauchy por los contraejemplos de Fourier. Mostraré que lo resuelve (o, mejor, lo «resuelve») mediante el método primitivo de «exclusión de excepciones»[235].

3. Método de exclusión de excepciones de Abel

Tan sólo en una nota plantea Abel el problema, que tengo por el problema básico fundamental de su célebre artículo sobre las series binomiales[236]. Escribe: «Me parece que hay algunas excepciones al teorema de Cauchy», y pone inmediatamente el ejemplo de la serie[237]

$$\operatorname{sen}\phi - \frac{1}{2}\operatorname{sen}2x + \frac{1}{3}\operatorname{sen}3x - \cdots$$

Añade Abel que «como se sabe, hay muchos más ejemplos como éste». Su respuesta a estos contraejemplos consiste en empezar a conjeturar: «¿Cuál es el dominio seguro del teorema de Cauchy?»

He aquí su respuesta a esta pregunta: el dominio de validez de los teoremas del análisis en general y de los teoremas acerca de la continuidad de la función límite en particular está restringido a series de potencias. Todas las excepciones conocidas de este principio de continuidad básico eran series trigonométricas, por lo que propuso restringir el análisis al interior de las seguras fronteras de las series de potencias, dejando así fuera las queridas series trigonométricas de Fourier como si fuesen una jungla incontrolable, en

las que las excepciones son la norma y los éxitos, un milagro.

En una carta a Hansteen, fechada el 29 de marzo de 1826, caracterizaba la «miserable inducción euleriana» como un método que conduce a generalizaciones falsas y sin fundamento, preguntándose la razón por la cual tales procedimientos han llevado de hecho a tan *pocas* calamidades. Su respuesta es:

> A mi modo de ver, la razón estriba en que en análisis se ocupa uno en gran medida de funciones que se puedan representar mediante series de potencias. Tan pronto como aparecen otras funciones (cosa que sólo ocurre rara vez), entonces [la inducción] no funciona ya y de esas conclusiones falsas surge un infinito número de teoremas incorrectos, llevando uno a los demás. He investigado varios de ellos y he tenido la suerte de resolver el problema…[238]

En el artículo de Abel, hallamos su famoso teorema (que, según pretendo, surgió de su adhesión al principio metafísico de Leibniz) en la siguiente forma restringida:

> Si la serie
>
> $$f\alpha = \nu_0 + \nu_1\alpha + \nu_2\alpha^2 + \cdots + \nu_m\alpha^m + \cdots$$
>
> es convergente para un valor dado δ de α, también convergerá para todo valor menor que δ y, para valores tendentes a cero de β, la función $f(\alpha - \beta)$ se aproximará indefinidamente al límite $f\alpha$ supuesto que α sea menor o igual a δ[239].

Los modernos historiadores racionalistas de las matemáticas, quienes consideran la historia de las matemáticas como la historia de un desarrollo homogéneo del conocimiento sobre la base de una metodología inalterable, suponen que cualquiera que descubra un contraejemplo global y proponga una nueva conjetura que no esté sujeta a refutación por medio del contraejemplo en cuestión, ha descubierto automáticamente el

correspondiente lema oculto y el concepto generado por la prueba. De este modo, semejantes estudiosos de la historia atribuyen a Abel el descubrimiento de la convergencia uniforme. Así, en la autorizada *Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften,* Pringsheim dice que Abel «demostró la existencia de la propiedad hoy denominada convergencia uniforme»[240]. Hardy comparte la opinión de Pringsheim. En su artículo [1918] dice que «la idea de convergencia uniforme está inplícitamente presente en la prueba de Abel de su famoso teorema»[241]. Bourbaki es aún más explícitamente falso; según él, Cauchy

> no percibió al principio la distinción entre convergencia simple y convergencia uniforme y se sintió capaz de demostrar que toda serie convergente de funciones continuas tiene como suma una función continua. El error fue casi inmediatamente puerto de manifiesto por Abel, quien demostró a la vez que toda serie completa [?] es continua en el interior de su intervalo de convergencia, por medio del razonamiento que se ha hecho clásico y que utiliza esencialmente, en este caso particular, la idea de convergencia uniforme. Lo único que restaba era destacar ésta última de un modo general, cosa que hicieron independientemente Stokes y Seidel en 1847-8 y el propio Cauchy en 1853[242].

Hay aquí tantos errores como frases. Abel no descubrió el error de Cauchy al identificar los dos tipos de convergencia. Su prueba no explota el concepto de convergencia uniforme, como tampoco lo hacía Cauchy. Los resultados de Abel y Seidel no están en la relación de «especial» y «general», sino que están en niveles totalmente distintos. Abel ni siquiera se dio cuenta de que no es el dominio de las funciones aceptables lo que ha de restringirse, sino más bien el modo en que convergen. *De hecho, para Abel no hay más que un tipo de convergencia, el más simple;* el secreto de su fingida certeza en su prueba, en el caso de las series de potencias, reside en sus precavidas (y afortunadas) *definiciones-cero*[243]: como ahora sabemos, en el caso de las series de potencias, la convergencia simple coincide con la uniforme[244].

A la vez que critico a los historiadores, debería mencionar tan sólo que el primer contraejemplo del teorema de Cauchy se ha atribuido generalmente a Abel. Tan sólo Jourdain se dio cuenta de que aparece en Fourier. Mas él, siguiendo el espíritu ahistórico ya señalado, extrae de ese hecho la consecuencia de que Fourier, por quien Jourdain sentía una gran admiración, estuvo muy cerca de descubrir el concepto de convergencia uniforme[245]. Hasta el momento, todos los historiadores han fracasado a la hora de constatar que un contraejemplo puede tener que luchar por su reconocimiento y, una vez reconocido, puede que aún no lleve automáticamente al lema oculto, y de ahí, al concepto generado por la prueba en cuestión.

4. Obstáculos en el camino hacia el descubrimiento del método de análisis de la prueba

Pero, volvamos al problema principal. ¿Por qué los matemáticos más importantes, desde 1821 hasta 1847, no consiguieron dar con el sencillo fallo de la prueba de Cauchy, para mejorar así tanto el análisis de la prueba como el teorema?

La primera respuesta es que no conocían el método de pruebas y refutaciones. No sabían que, tras el descubrimiento de un contraejemplo, tenían que examinar cuidadosamente su prueba tratando de hallar el lema culpable. Se ocupaban de los contraejemplos globales con ayuda del heurísticamente estéril método de exclusión de excepciones.

De hecho, Seidel descubrió el concepto generado por la prueba de convergencia uniforme, así como el método de pruebas y refutaciones, de un solo golpe. Era plenamente consciente de su descubrimiento metodológico[246] que enunció en su artículo con gran claridad:

> Partiendo de la recién obtenida certeza de que el teorema no es universalmente válido, y de ahí, de que su prueba debe descansar en alguna oculta suposición extra, se somete la prueba a un análisis más detallado. No resulta muy difícil descubrir la hipótesis oculta. Se puede entonces inferir hacia atrás que esta condición expresada por la

> hipótesis no resulta satisfecha por una serie que represente funciones discontinuas, pues sólo así se puede restaurar el acuerdo entre la secuencia, por otro lado correcta, de la prueba y lo que se ha establecido por otra parte[247].

¿Qué impidió descubrir esto a la generación anterior a Seidel? La razón fundamental (que ya hemos mencionado) era el dominio de la metodología euclídea.

La revolución del rigor de Cauchy estaba motivada por un intento consciente de aplicar la metodología euclídea al cálculo[248]. Él y sus seguidores pensaban que era así como podrían introducir la luz necesaria para disipar la «tremenda oscuridad del análisis»[249]. Cauchy procedía con el espíritu de las reglas de Pascal: se propuso primero definir los términos oscuros del análisis, como límite, convergencia, continuidad, etc., en los términos perfectamente familiares de la aritmética y, luego, procedió a probar todo lo que no había sido probado anteriormente o lo que no era perfectamente obvio. Ahora bien, en el marco euclídeo, no hay modo de ponerse a probar lo que es falso y, así, Cauchy tenía antes que mejorar el restante cuerpo de conjeturas matemáticas, arrojando por la borda la basura falsa. A fin de mejorar las conjeturas, aplicó el método consistente en buscar excepciones y en restringir el dominio de validez de las conjeturas originales, aproximadamente enunciadas, a un campo seguro; es decir, aplicó el método de exclusión de excepciones[250].

En la edición 1865 del *Larousse*, un autor (probablemente Catalan) caracterizó de un modo más bien sarcástico la búsqueda de contraejemplos de Cauchy. Escribía:

> Tan sólo ha introducido en la ciencia doctrinas negativas… de hecho, lo que consigue descubrir es casi siempre el aspecto negativo de la verdad; eso es lo que se preocupa por poner en evidencia: si hubiese descubierto algo de oro en la tiza, habría anunciado al mundo que la tiza no está *exclusivamente* formada por carbonato de cal.

Parte de una carta que Abel escribió a Holmboë constituye un elemento de juicio adicional en favor de este nuevo talante escrutador de la escuela de Cauchy:

> He comenzado a examinar las más importantes reglas que (en el presente) sancionamos ordinariamente a este respecto y a mostrar en qué casos no resultan adecuadas. Esto va bastante bien y despierta en mí un interés infinito[251].

Lo que los rigoristas consideraban basura sin esperanza, tal como las conjeturas acerca de las sumas de series divergentes, era debidamente entregado a las llamas[252]. «Las series divergentes», escribía Abel, «son obra del demonio». Lo único que producen son «calamidades y paradojas»[253].

Pero, aunque trataban constantemente de mejorar sus conjeturas mediante exclusión de excepciones, la idea de *mejorar* probando nunca se les ocurrió. Las dos actividades de conjeturar y probar están rígidamente separadas en la tradición euclídea. A los rigoristas les resultaba ajena la idea de una prueba merecedora de tal nombre y que, no obstante, aún no fuese concluyente. Los contraejemplos eran tenidos por manchas graves y desastrosas: mostraban que la conjetura estaba equivocada y que había que comenzar de nuevo a probar, partiendo de cero.

Se trata de algo comprensible a la vista del hecho de que en el siglo dieciocho recibía el nombre de prueba un zarrapastroso razonamiento inductivo[254]. Sin embargo, no había modo de mejorar *esas* «pruebas». Eran oportunamente desechadas como «pruebas no rigurosas, esto es, que no constituyen pruebas en absoluto»[255]. *La argumentación inductiva era falible* y. *por tanto, era entregada a las llamas. Los argumentos deductivos ocuparon su lugar, porque se consideraban infalibles.* «Hago desaparecer toda incertidumbre», anunciaba Cauchy[256]. Contra este trasfondo ha de evaluarse la refutación del teorema «rigurosamente» probado por Cauchy. Además, esa refutación no era un caso aislado. La prueba rigurosa que dio Cauchy de la fórmula de Euler fue seguida de igual manera, como hemos visto, por artículos expresando las conocidísimas «excepciones».

Sólo había dos salidas: o revisar toda la filosofía infalibilista de las matemáticas subyacentes al método euclídeo, o bien ocultar de algún modo el problema. Veamos primero qué hubiera entrañado la revisión del enfoque infalibilista. Ciertamente, habría que abandonar la idea de que todas la matemáticas se pueden reducir a trivialidades indubitablemente verdaderas, de que hay enunciados sobre los que nuestra intuición no puede equivocarse. Habría que abandonar la idea de que nuestra intuición deductiva, inferencial, es infalible. Tan sólo el reconocimiento de estas dos cosas hubiera podido abrir el camino al libre desarrollo del método de pruebas y refutaciones y a su aplicación a la evaluación crítica de la argumentación deductiva y al problema de habérselas con los contraejemplos[257].

La crítica matemática quedaba excluida en tanto en cuanto los contraejemplos fuesen una mancha no sólo para el teorema, sino también para el matemático que lo invocaba; en tanto en cuanto sólo hubiese pruebas o no-pruebas, pero no pruebas con puntos débiles. Fue el trasfondo filosófico infalibilista del método euclídeo el que engendró los patrones autoritarios, tradicionales en matemáticas, que impidieron la publicación y discusión de las conjeturas y que hicieron imposible el surgimiento de la crítica matemática. La crítica literaria existe, porque podemos apreciar un poema sin considerarlo perfecto; la crítica matemática o científica no puede existir mientras sólo apreciemos un resultado matemático o científico cuando suministra una verdad perfecta. Una prueba es una prueba tan sólo si prueba; y o prueba o no prueba. La idea, tan claramente expresada por Seidel, de que una prueba puede ser respetable sin ser intachable, resultaba revolucionaria en 1847 y, desafortunadamente, aún parece revolucionaria hoy día.

No es una coincidencia que el descubrimiento del método de pruebas y refutaciones tuviese lugar en la década de 1840, cuando el hundimiento de la óptica newtoniana (debido al trabajo de Fresnel en las décadas de 1810 y 1820) y el descubrimiento de las geometrías no-euclídeas (debido a Lobatchewsky, en 1829, y a Bolyai, en 1832) hicieron saltar en pedazos el orgullo infalibilista[258].

Antes del descubrimiento del método de pruebas y refutaciones, el problema planteado por la sucesión de contraejemplos, tras un teorema «rigurosamente probado», sólo se podía «resolver» mediante el método de

exclusión de excepciones. *La prueba demuestra el teorema, aunque deja en pie el problema de cuál es el dominio de validez del teorema. Podemos determinar este dominio enunciando y excluyendo cuidadosamente las «excepciones» (el eufemismo es característico del período). Esas excepciones son luego escritas en la formulación del teorema.*

El dominio del método de exclusión de excepciones muestra cómo el método euclídeo puede, en determinadas situaciones problemáticas cruciales, tener efectos deletéreos sobre el desarrollo de las matemáticas. La mayoría de estas situaciones problemáticas se plantean en las teorías matemáticas en desarrollo, donde los conceptos que están apareciendo son los vehículos del progreso y donde los desarrollos más interesantes provienen de la exploración de las regiones fronterizas de los conceptos, de su extensión y de la diferenciación de conceptos anteriormente indiferenciados. La intuición carece de experiencia en estas teorías en desarrollo, por lo que se equivoca y tropieza. No hay teoría que no haya pasado por tal período de desarrollo. Además, dicho período resulta el más interesante desde el punto de vista histórico y debiera ser el más importante desde el punto de vista de la enseñanza. No se pueden comprender cabalmente esos períodos sin haber comprendido el método de pruebas y refutaciones y sin adoptar un enfoque falibilista.

Es esa la razón por la cual Euclides ha sido el genio maligno particular de la historia y la enseñanza de las matemáticas, tanto a un nivel introductorio como a un nivel creativo[259].

Nota

En este apéndice no se han discutido los estadios suplementarios 5, 6 y 7 (cf. la pág. 150) del método de pruebas y refutaciones. Mencionaría aquí tan sólo que una búsqueda metódica de convergencia uniforme en otras pruebas (estadio 5) hubiera suministrado muy rápidamente la refutación y mejora de otro teorema demostrado por Cauchy: el teorema de que la integral del límite de cualquier serie convergente de funciones continuas es el límite de la sucesión de las integrales de los términos o, brevemente, que en el caso de

series de funciones continuas, la operación de paso al límite y de integral son permutables. Esto había sido algo incontestado durante el dieciocho e incluso Gauss lo aplicó sin pensarlo dos veces. (Véase Gauss [1813], Knopp [1928] y Bell [1945].)

Ahora bien, a Seidel, que descubrió la convergencia uniforme en 1847, no se le ocurrió examinar otras pruebas a ver si en ellas se había dado por supuesto. Stokes, quien descubrió la convergencia uniforme en el mismo año, aunque no con el método de pruebas y refutaciones, utiliza en el mismo artículo el teorema falso sobre la integración de series, refiriéndose a Moigno (Stokes [1848]). (Stokes cometió otro error: pensaba que había demostrado que la convergencia uniforme no sólo era suficiente, sino también necesaria, para la continuidad de la función límite.)

Este retraso a la hora de descubrir que la demostración de que la integración de series depende también de la suposición de la convergencia uniforme, puede haberse debido al hecho de que esta conjetura primitiva fue refutada por un contraejemplo concreto tan sólo en 1875 (Darboux 1875), época por la que el análisis de la prueba había ya rastreado la convergencia uniforme en la prueba, sin que el análisis hubiese sido catalizado por un contraejemplo. La cacería de la convergencia uniforme, una vez puesta en marcha con Weierstrass a la cabeza, descubrió pronto el concepto de pruebas relativas a diferenciación término a término, límites dobles, etc.

El *sexto estadio* consiste en comprobar las consecuencias hasta ese momento aceptadas de la conjetura primitiva refutada. ¿Podemos rescatar esas consecuencias o, por el contrario, la refutación del lema conduce a un holocausto desastroso? La integración término a término, por ejemplo, era la piedra angular de la prueba de Dirichlet de la conjetura de Fourier. Du Bois-Reymond describe la situación en términos dramáticos: la teoría de las series trigonométricas ha «recibido una estocada en el corazón», sus dos teoremas clave «han perdido pie» y «de un golpe, la teoría general volvió al estado en que se encontraba antes de Dirichlet; antes incluso de Fourier». (Du Bois-Reymond [1875], pág. 120.) Un tema interesante de estudio es ver cómo se reconquistó el «terreno perdido».

En este proceso, se desenterró una oleada de contraejemplos, aunque su estudio (el *séptimo estadio* del método) no comenzó hasta los últimos años

del siglo. (Por ejemplo, la obra de Young sobre la clasificación y distribución de puntos de convergencia no uniforme; Young [1903-4].)

APÉNDICE 2

EL ENFOQUE DEDUCTIVISTA FRENTE AL ENFOQUE HEURÍSTICO

1. El enfoque deductivista

La metodología euclídea ha desarrollado un cierto estilo necesario de presentación. Me referiré a él como al «estilo deductivista». Este estilo comienza con la enunciación de una penosa lista de *axiomas, lemas* y/o *definiciones.* Los axiomas y definiciones parecen con frecuencia artificiales y mistificadoramente complicados. Nunca se nos dice cómo surgieron esas complicaciones. La lista de axiomas y definiciones va seguida por *teoremas* cuidadosamente expresados. Estos están cargados de pesadas condiciones; parece imposible que alguien los haya barruntado alguna vez. El teorema va seguido por la *prueba.*

De acuerdo con el ritual euclídeo, el estudiante se ve obligado a asistir a esta conjura sin hacer preguntas ni sobre el trasfondo ni sobre cómo se realiza el juego de manos. Si el estudiante descubre por azar que algunas de las definiciones inconvenientes están generadas por la prueba, si se pregunta sencillamente cómo es que esas definiciones, esos lemas y el teorema pueden preceder a la prueba, el autor del conjuro lo relegará al ostracismo por esta muestra de inmadurez matemática[260].

En el estilo deductivista, todas las proposiciones son verdaderas y todas las inferencias son válidas. Las matemáticas se presentan como un conjunto siempre creciente de verdades eternas e inmutables, en el que no pueden entrar los contraejemplos, las refutaciones o la crítica. Mi tema de estudio se

recubre de un aire autoritario, al comenzar con una exclusión de monstruos disfrazada, con definiciones generadas por la prueba y con el teorema completamente desarrollado, así como al suprimir la conjetura original, las refutaciones y la crítica de la prueba. El estilo deductivista esconde la lucha y oculta la aventura. Toda la historia se desvanece, las sucesivas formulaciones tentativas del teorema a lo largo del procedimiento probatorio se condenan al olvido, mientras que el resultado final se exalta al estado de infalibilidad sagrada[261].

Algunos de los defensores del estilo deductivista pretenden que la deducción es *el* patrón heurístico de las matemáticas y que la lógica del descubrimiento es la deducción[262]. Otros constatan que tal cosa no es cierta, pero de ello sacan como consecuencia que el descubrimiento matemático es una cuestión completamente arracional. Así, pretenderán que, aunque el descubrimiento matemático no proceda deductivamente, si queremos que nuestra presentación de los descubrimientos matemáticos se realice racionalmente, habrá de proceder al estilo deductivista[263].

Así pues, hoy en día, disponemos de dos argumentos en favor del estilo deductivista. Uno de ellos se basa en la idea de que la heurística es racional y deductivista. El segundo argumento se basa en la idea de que la heurística no es deductivista, aunque tampoco racional.

Hay también un tercer argumento. Algunos matemáticos profesionales a los que no les gustan los lógicos, filósofos y otros seres extravagantes que interfieren en su trabajo dicen frecuentemente que la introducción del estilo heurístico exigiría escribir de nuevo los libros de texto y los haría tan largos que nunca se podrían leer hasta el final. También los artículos se alargarían mucho[264]. La respuesta a este argumento pedestre es: intentémoslo.

2. El enfoque heurístico. Conceptos generados por la prueba

Esta sección contendrá algunos análisis heurísticos breves de algunos conceptos matemáticamente importantes generados por la prueba. Esperamos que estos análisis muestren la ventaja de introducir elementos heurísticos en el estilo matemático.

Como ya se ha mencionado, el estilo deductivista desgaja las definiciones generadas por la prueba de sus «pruebas-antepasadas» y las presenta aisladamente de un modo artificial y autoritario. Oculta los contraejemplos globales que han llevado a su descubrimiento. Por el contrario, el estilo heurístico pone en el candelero esos factores y hace hincapié en la situación problemática: hace hincapié en la «lógica» que ha dado a luz al nuevo concepto.

Veamos en primer lugar cómo se puede introducir en estilo heurístico el concepto generado por la prueba de convergencia uniforme que hemos discutido más arriba (apéndice 1). Tanto en éste como en otros ejemplos, suponemos ciertamente que se está familiarizado en cierta medida con los términos técnicos del método de pruebas y refutaciones. Pero ello no resulta más exigente que el requisito usual de familiaridad con los términos técnicos del programa euclídeo, como axiomas, términos primitivos, etc.

(a) Convergencia uniforme

Tesis. La versión específica del principio leibniziano de continuidad, que enuncia que la función límite de una sucesión convergente de funciones continuas es continua. *(Conjetura primitiva)*

Antítesis. La definición de continuidad de Cauchy eleva la tesis a un nivel superior. Su *decisión definitoria* legaliza los contraejemplos de Fourier. Esta definición excluye al mismo tiempo el posible compromiso consistente en restaurar la continuidad mediante líneas perpendiculares y así da lugar, junto con algunas series trigonométricas, al polo negativo de la antítesis. El «polo positivo» se fortalece con la prueba de Cauchy que será la prueba-antecesora de la convergencia uniforme. El «polo negativo» se fortalece con más y más *contraejemplos globales* de la primitiva conjetura.

Síntesis. El *lema culpable*, respecto al cual los contraejemplos globales son también *locales*, queda identificado: la prueba se mejora, así como la conjetura. Los constituyentes característicos de la síntesis emergen; el *teorema* y con él el *concepto generado por la prueba* de convergencia uniforme[265].

Creo que el lenguaje hegeliano que aquí utilizo, podrá describir en general los diversos desarrollos matemáticos. (Con todo, además de sus atractivos posee sus peligros.) El concepto hegeliano de heurística que subyace al lenguaje es más o menos el siguiente. La actividad matemática es una actividad humana. Ciertos aspectos de dicha actividad, como los de cualquier actividad humana, se pueden estudiar con la psicología, y otros con la historia. La heurística no se interesa primariamente por esos aspectos; pero la actividad matemática produce matemáticas. Las matemáticas, este producto de la actividad humana, se «enajena» de la actividad humana que la ha estado produciendo. Se convierte en un organismo viviente y en desarrollo que *adquiere una cierta autonomía* respecto a la actividad que la ha producido; desarrolla sus propias leyes autónomas de crecimiento, su propia dialéctica. El matemático genuinamente creativo no es más que una personificación, una encarnación de esas leyes que sólo se pueden realizar en la acción humana. Su encarnación, con todo, rara vez es perfecta. Tal como aparece en la historia, la actividad de los matemáticos humanos no es más que una chapucera realización de la maravillosa dialéctica de las ideas matemáticas. Pero, cualquier matemático que tenga talento, chispa y genio, está en comunión con, siente la absorción de y obedece esta dialéctica de ideas[266].

Ahora bien, la heurística se ocupa de la dialéctica autónoma de las matemáticas y no de su historia, si bien sólo puede estudiar su objeto mediante el estudio de la historia y mediante la reconstrucción racional de la misma[267].

(b) Variación acotada

El modo en que se introduce generalmente el concepto de variación acotada en los libros de texto de análisis constituye un bello ejemplo del estilo deductivista autoritario. Tomemos de nuevo el libro de Rudin. Hacia la mitad del capítulo dedicado a la integral de Riemann-Stieltjes, introduce repentinamente la definición de funciones de variación acotada.

6.20. *Definición.* Defínase f sobre $[a, b]$. Ponemos

$$(37) \qquad V(f) = \sup \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

> donde sup se toma sobre todas las particiones de [*a*, *b*], y denominamos a *V*(*f*) la variación total de *f* sobre [*a, b*][268].

¿Por qué habríamos de interesarnos precisamente por este conjunto de funciones? La respuesta deductivista es: «espera y verás». Así, que esperemos, sigamos la exposición e intentemos ver. La definición va seguida de ejemplos ingeniados para dar al lector alguna idea acerca del dominio del concepto (es esto y algunas cosas semejantes lo que hacen que el libro de Rudin sea extraordinariamente bueno dentro de la tradición deductivista). Sigue después una serie de teoremas (6.22, 6.24, 6.25). Luego, de pronto, viene la siguiente proposición:

> *Corolario 2.* Si *f* es de variación acotada y *g* es continua en [*a*, *b*], entonces $f \in \mathcal{R}^*(g)$[269].
> ($\mathcal{R}^*(g)$ es la clase de las funciones de Riemann-Stieltjes integrables respecto a *g*.)

Podríamos interesarnos más en esta proposición si comprendiésemos realmente por qué son tan importantes las funciones integrables de Riemann-Stieltjes. Rudin ni siquiera menciona el concepto intuitivamente más obvio de integrabilidad, a saber, la integrabilidad de Cauchy, cuya crítica condujo a la integrabilidad de Riemann. Así, llegamos ahora a un teorema en el que aparecen dos conceptos místicos, variación acotada e integrabilidad de Riemann. Mas dos misterios no contribuyen a la comprensión. ¿O, tal vez es así para quienes poseen la «capacidad e inclinación a seguir una cadena abstracta de pensamiento»?[270]

Una presentación heurística hubiese mostrado que ambos conceptos, la integrabilidad de Riemann-Stieltjes y la variación acotada, son conceptos generados por la prueba que se originan en una y la misma prueba: la demostración de Dirichlet de la conjetura de Fourier. Esta prueba suministra

el trasfondo problemático de ambos conceptos[271].

Ahora bien, la primitiva conjetura de Fourier[272] no contiene ningún término místico. Este «antecesor conjetural» de variación acotada dice que cualquier función arbitraria resulta desarrollable en series de Fourier[273], lo que constituye una conjetura simple y de lo más interesante. La conjetura fue probada por Dirichlet[274]. Este examinó cuidadosamente su prueba y mejoró la conjetura de Fourier incorporándole los lemas como condiciones. Esas condiciones son las famosas condiciones de Dirichlet. El teorema resultante es el siguiente: Son desarrollables en series de Fourier todas las funciones (1) cuyo valor en un punto de discontinuidad es $\frac{1}{2}[f(x + 0) + f(x - 0)]$, (2) que tienen sólo un número finito de discontinuidades y (3) que tiene sólo un número finito de máximos y mínimos[275].

Todas estas condiciones se desprenden de la prueba. El análisis de la prueba de Dirichlet estaba equivocado tan sólo por lo que respecta a la tercera condición: de hecho la prueba descansa tan sólo sobre la variación acotada de la función. Se criticó el análisis de la prueba de Dirichlet y su error lo corrigió C. Jordan en 1881, quien se convirtió en el descubridor del concepto de variación acotada. Sin embargo, no fue él quien inventó el concepto, no fue él quien lo «introdujo»[276], sino que más bien lo *descubrió* en la prueba de Dirichlet en el transcurso de un reexamen crítico[277].

Otra debilidad de la prueba de Dirichlet venía dada por su uso de la definición de Cauchy de la integral, que es una herramienta útil sólo para funciones continuas. Según la definición de Cauchy, las funciones discontinuas no son en absoluto integrables e *ipso facto* no son desarrollables en series de Fourier. Dirichlet evitó esta dificultad considerando la integral de una función discontinua como la suma de las integrales en esos intervalos en los que la función era continua. Eso se puede hacer fácilmente si el número de discontinuidades es finito, aunque lleva a dificultades si es infinito. Esa es la razón por la que Riemann criticó el concepto de integral de Cauchy e inventó otro nuevo.

Así, las dos misteriosas definiciones de variación acotada y de integral de Riemann quedan *entzaubert,* privadas de su magia autoritaria. Su origen se puede rastrear hasta una situación problemática clara y hasta la crítica de los intentos previos de solucionar esos problemas. La primera es una definición

generada por la prueba, formulada tentativamente por Dirichlet y finalmente descubierta por C. Jordan, crítico del análisis de la prueba de Dirichlet. La segunda definición procede de la crítica de una definición anterior de la integral que resultó ser inaplicable a problemas más complicados.

En este segundo ejemplo de exposición heurística, hemos seguido el patrón popperiano de la lógica de conjeturas y refutaciones. Este patrón sigue la historia más de cerca que el hegeliano, que desestima el «ensayo y error» como una apreciación humana burdamente miope del desarrollo necesario de las ideas objetivas. Pero, aun en una heurística racional de corte popperiano, hay que distinguir entre los problemas que se propone uno resolver y los problemas que de hecho se resuelven; hay que distinguir los errores «accidentales», por un lado, que desaparecen simplemente y cuya crítica no desempeña ninguna función en el ulterior desarrollo, de los errores «esenciales» que, en cierto sentido, se conservarán tras la refutación y en cuya crítica se basa el desarrollo ulterior. En la presentación heurística, los errores accidentales se pueden omitir sin pérdidas, puesto que ocuparse de ellos es una tarea que sólo compete a la historia.

Tan sólo hemos esbozado los cuatro primeros estadios del procedimiento de prueba que ha llevado al concepto de variación acotada. Aquí tan sólo apuntamos el resto de este intrigante acontecimiento. El quinto estadio[278], la cacería en otras pruebas del concepto generado por la prueba recientemente hallado, llevó inmediatamente al descubrimiento de variación acotada en la prueba de la conjetura primitiva de que «todas las curvas son rectificables»[279]. El séptimo estadio nos lleva a la integral de Lebesgue y a la moderna teoría de la medida.

Nota histórica

A la historia contada en el texto se pueden añadir algunos detalles heurísticamente interesantes. Dirichlet estaba convencido de que los contraejemplos locales de sus lemas segundo y tercero *no* eran *globales;* estaba convencido, por ejemplo, de que todas las funciones continuas, independientemente del número de sus máximos y mínimos, resultan desarrollables en series de Fourier. También esperaba que este resultado más

general se pudiese probar mediante simples correcciones *locales* de su prueba. La idea de que (1) la prueba de Dirichlet era solamente parcial y (2) que la prueba final se podría conseguir mediante simples correcciones poco importantes fue aceptada ampliamente de 1829 a 1876, cuando du Bois-Reymond suministró el *primer* contraejemplo genuino de la vieja conjetura de Fourier, destruyendo con ello las esperanzas de tal corrección. El descubrimiento de la variación acotada de Jordan parece haber sido estimulado por este contraejemplo.

Es interesante resaltar que también Gauss animó a Dirichlet a mejorar su prueba, de modo que se aplicase a funciones con cualquier número de máximos y mínimos. Es curioso que, si bien Dirichlet no resolvió ese problema, sea en 1829 o en 1837, con todo, seguía pensando en 1853 que la solución era tan obvia, que la improvisó en la carta de respuesta a la petición de Gauss (Dirichlet [1853]). El *quid* de esa solución es el siguiente. La condición de que el conjunto de máximos y mínimos no haya de tener ningún punto de condensación en el intervalo considerado es de hecho una condición suficiente de esta prueba. Ya en su primer artículo de [1829] afirmaba que se podía corregir su *segunda* condición acerca del número finito de discontinuidades. Afirmaba allí que, de hecho, su prueba se aplica sólo si el conjunto de discontinuidades no es denso en ningún sitio. Estas correcciones muestran que Dirichlet estaba muy preocupado por el problema del análisis de su prueba y estaba convencido de que se aplicaba a más funciones que aquellas que satisfacían sus cautas condiciones, denominadas más tarde «condiciones de Dirichlet». Es revelador que en su [1837] no enuncie en absoluto el teorema. Siempre estuvo convencido de que su teorema servía para todas las funciones continuas y su carta a Gauss así lo muestra, como él mismo señaló al posiblemente escéptico Weierstrass. (Cf. *Ostwald's Klassiker der Exakten Wissenschaften,* 186, 1913, pág. 125.)

Ahora bien, el teorema, tal como lo enunció en su [1829], abarca de hecho todos los tipos de funciones «que ocurren en la naturaleza». Además, un análisis más refinado lleva siempre al dominio del análisis «purísimo». Afirmo que el análisis de la prueba de Dirichlet (realizado en primer lugar por Riemann) constituye el punto de partida del análisis abstracto moderno y encuentro exagerado el punto de vista recientemente tan extendido de

Jourdain acerca de Fourier. Este no estaba interesado en los argumentos matemáticos que fuesen más allá de una aplicación inmediata. El pensamiento de Dirichlet era realmente distinto. Presentía vagamente que el análisis de su prueba requería un nuevo marco conceptual. La última frase de su [1829] constituye una verdadera profecía:

> Pero, la tarea a realizar con toda la claridad deseable exige algunos detalles íntimamente ligados a los principios fundamentales del cálculo infinitesimal, que serán presentados en otra nota…

Sin embargo, nunca publicó la nota prometida. Fue Riemann quien, al criticar el concepto de integral de Cauchy, clarificó estos «detalles íntimamente ligados a los principios fundamentales del cálculo infinitesimal» y quien, al articular los vagos presentimientos de Dirichlet y al introducir una técnica revolucionaria, introdujo el análisis matemático y, ciertamente, la racionalidad en el dominio de las funciones que no tienen lugar en la naturaleza y que se habían considerado hasta entonces como monstruos o, a lo sumo, como «singularidades» o excepciones sin interés. (Esta era la actitud expresada por Dirichlet en su artículo de [1853].)

Algunos historiadores infalibilistas de las matemáticas utilizan aquí una técnica ahistórica, consistente en condensar un largo desarrollo, lleno de lucha y crítica, en una única acción de intuición infalible, atribuyendo a Dirichlet la madurez de analistas posteriores. Los historiadores anti-históricos atribuyen nuestro concepto general moderno de función real a Dirichlet y, consiguientemente, le dan el nombre de concepto de función de Dirichlet. E. T. Bell afirma en su [1945], pág. 293, que «la definición de P. G. L. Dirichlet de una función (de valor numérico) de una variable (real, de valor numérico) como una tabla, correspondencia o correlación entre dos conjuntos de números apuntaba a una teoría de equivalencia de conjuntos de puntos». Bell da como referencia: «Dirichlet: *Werke,* I, pág. 135». Pero, no aparece allí nada de ese estilo. Dice Bourbaki: «Se sabe que, en esta ocasión, Dirichlet, al precisar las ideas de Fourier, definió la noción general de función tal como la entendemos hoy día», (Bourbaki [1960], pág. 247.) «Se sabe», dice Bourbaki, pero no da ninguna referencia. En los libros de texto más clásicos (por

ejemplo, Pierpoint [1905], pág. 120) hallamos la consideración de que este concepto de función real «se debe a Dirichlet». Ahora bien, no aparece en absoluto tal definición en las obras de Dirichlet. Sin embargo, existen amplios elementos de juicio en el sentido de que no tenía la menor idea de este concepto. En su artículo de [1837], por ejemplo, cuando discute las funciones continuas «a trozos», dice que en los puntos de discontinuidad la función *tiene dos valores:*

> La curva, cuyas coordenadas x e y se denotan por medio de β y $\varphi(\beta)$ respectivamente, consta de varias partes. En los puntos sobre el eje de las x, correspondientes a ciertos valores particulares de β, las sucesivas porciones de la curva están desconectadas; a cada una de tales coordenadas x le corresponde de hecho 2 coordenadas y una de las cuales pertenece a la porción que termina en ese punto y la otra a la porción que allí comienza. En lo que sigue, sera necesario distinguir estos dos valores de $\varphi(\beta)$ que denotaremos mediante $\varphi(\beta - 0)$ y $\varphi(\beta + 0)$.

Estas citas muestran más allá de toda duda razonable cuán lejos estaba Dirichlet de la «concepción de función de Dirichlet».

Quienes asocian a Dirichlet con la «definición de Dirichlet» están pensando normalmente en la función de Dirichlet que aparece en la última página de su artículo de [1829]: una función que es 0 donde x es racional y 1 donde x es irracional. De nuevo, el problema es que Dirichlet seguía sosteniendo que todas las funciones genuinas son de hecho desarrollables en series de Fourier (construyó esta «función» explícitamente como un monstruo). Según Dirichlet, su «función» no constituye un ejemplo de una función real «ordinaria», sino de una función que en realidad no merece tal nombre.

Es curioso que quienes se las han arreglado para encontrar la definición de Dirichlet de función a pesar de su ausencia, no hayan tenido en cuenta los títulos de sus dos artículos, que se refieren al desarrollo de cualesquiera funciones «completamente arbitrarias» *(ganz willkürliche)* en series de Fourier. Mas eso significa que, según Dirichlet, la función de Dirichlet está

fuera de esa familia de «funciones completamente arbitrarias» y que la considera como un monstruo, puesto que una función «ordinaria» tenía que tener una integral, cosa que obviamente no tenía ésta. De hecho, Riemann criticó el concepto estrecho que Dirichlet tenía de función, con ocasión de su crítica al concepto de integral de Cauchy, junto con sus correcciones *ad hoc* debidas a Dirichlet. Riemann mostró que si ampliamos el concepto de integral, entonces una función monstruosa que sea discontinua para todo número racional del tipo $p/2n$, donde p es un número impar, primo respecto a n, es integrable aunque sea discontinua en un conjunto denso en todo punto. Por consiguiente, esta función tan próxima al monstruo de Dirichlet es ordinaria. (Nada había de «arbitrario» en la extensión de Riemann del concepto de integral; su paso revolucionario fue preguntarse qué tipo de funciones son desarrollables en series de Fourier. Su objetivo era extender tanto el concepto de integral, que todas las funciones que son sumas de series trigonométricas fuesen integrables y, por ello, desarrollables en series de Fourier. Se trata de un bellísimo ejemplo de instrumentalismo conceptual.)

Tal vez debiéramos identificar aquí al originador del cuento relativo al establecimiento por parte de Dirichlet de «la definición de función de Dirichlet». Fue H. Hankel quien, al analizar el desarrollo del concepto de función ([1882], págs. 63-112), explicó cómo los resultados de Fourier destruyeron el viejo concepto de función; a continuación, prosigue:

> Lo único que quedaba era, primero, eliminar la condición de que la función debiera ser analítica, basándose en que tal condición carece de significado; y, segundo, a la vez que se cortaba ese nudo, suministrar la siguiente explicación. Una función se denomina y de x, si a cada valor de la variable x en un cierto intervalo le corresponde un valor definido de y, y eso al margen de que y dependa de x según la misma ley en todo el intervalo y de que esa dependencia se pueda expresar mediante operaciones matemáticas. Adscribiré a Dirichlet esta definición puramente nominal, porque está a la base de su trabajo sobre series de Fourier, que ha demostrado el carácter insostenible de ese concepto más viejo…

(c) La definición de Carathéodory de conjunto medible

El paso del enfoque deductivista al heurístico resultará sin duda difícil; pero algunos maestros de matemática moderna ya se dan cuenta de su necesidad. Pongamos un ejemplo. En los libros de texto modernos sobre la teoría de la medida o la teoría de la probabilidad nos enfrentamos frecuentemente con la definición de Carathéodory de conjunto medible:

> Sea μ* una medida exterior sobre un anillo a hereditario **H**. Un conjunto E en **H** es μ* medible si, para todo conjunto A de **H**[280],
>
> $$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E')$$

Tal como está, la definición tiene que resultar sorprendente. Por supuesto, siempre está la salida fácil: las matemáticas definen sus conceptos como les da la gana. Pero, los maestros serios no utilizan este refugio fácil. Tampoco pueden decir que ésta es precisamente la definición *verdadera* y *correcta* de mensurabilidad y que la intuición matemática madura lo vería así. De hecho, normalmente, apuntan más bien vagamente a que deberíamos fijarnos en las conclusiones que luego se sacarán de la definición: «Las definiciones son dogmas; sólo las conclusiones sacadas de ellas pueden proporcionar una nueva visión»[281]. Así que tenemos que aceptar las definiciones como un acto de fe y ver qué pasa. Aunque tiene un toque de autoritarismo, al menos es una señal de que se ha percibido el problema. Se trata de una disculpa, aunque sea autoritaria. Permítasenos citar la disculpa de Halmos por la definición de Carathéodory: «Es un tanto difícil alcanzar una comprensión intuitiva del significado de μ*-mensurabilidad, si no es a través de la familiaridad con sus implicaciones que nos proponemos desarrollar más abajo»[282]. Y continúa:

> Con todo, el siguiente comentario podrá resultar útil. Una medida exterior no es necesariamente una función de conjunto enumerable o ni siquiera finitamente aditiva. En un intento de satisfacer el razonable requisito de aditividad, seleccionamos aquellos conjuntos que dividen

> aditivamente cualquier otro conjunto: la definición de μ*-mensurabilidad es la formulación precisa de esta descripción más bien laxa. La mayor justificación de este concepto aparentemente complicado es, con todo, su éxito tal vez sorprendente, pero absolutamente completo como instrumento para probar el importante y útil teorema de extensión de § 13[283].

Ahora bien, la primera parte «intuitiva» de esta justificación es un poco confundente, puesto que, como se nos dice en la segunda parte, éste es un concepto generado por la prueba del teorema de Carathéodory sobre la extensión de medidas (que Halmos sólo introduce en el capítulo siguiente). Así, que sea intuitivo o no es algo que carece totalmente de interés. Su razón de ser no está en su carácter intuitivo, sino en su prueba antecesora. Nunca se debería desgajar una definición generada por la prueba de su prueba antecesora, presentándola secciones e incluso capítulos antes de la prueba respecto a la que es heurísticamente secundaria.

En su [1955], M. Loeve presenta muy adecuadamente la definición en su sección sobre la extensión de medidas, como una noción precisa para el teorema de extensión: «Precisaremos varias nociones que aquí recogemos»[284]. ¿Pero, cómo vamos a saber cuáles de estos complicadísimos instrumentos serán necesarios para la operación? Ciertamente, tiene ya alguna idea de qué encontrará y cómo habrá de proceder. ¿Pero, por qué entonces esta escenografía mística, consistente en poner la definición antes que la prueba?

Es muy fácil poner más ejemplos, en los que enunciar la conjetura, mostrar la prueba y los contraejemplos, siguiendo el orden heurístico hasta el teorema, y la definición generada por la prueba habría de disipar el misticismo autoritario de las matemáticas abstractas, actuando como un freno de la degeneración. Un par de ejemplos de semejante degeneración le haría mucho bien a las matemáticas. Desgraciadamente, el estilo deductivista y la atomización del conocimiento matemático protegen en un grado considerable los artículos «degenerados».

BIBLIOGRAFÍA

(Revisada y ampliada por Gregory Currie)

Abel, N. H. [1825], «Letter to Holmboé», en S. Lie y L. Sylow (eds.): *Oeuvres Complètes*, vol. 2. Christiania: Grøndahl, 1881, págs. 257-8.

Abel, N. H. [1826*a*], «Letter to Hansteen», en S. Lie y L. Sylow (eds.): *Oenvres Complètes*, vol. 2. Christiania: Grøndahl, 1881, págs. 263-5.

Abel, N. H. [1826*b*], «Untersuchungen über die Reihe

$$1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3}x^3 + \cdots ,$$

Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, **1,** págs. 311-39.

Abel, N. H. [1881], «Sur les Séries», en S. Lie y L. Sylow (eds.): *Oeuvres Completes*, vol. 2. Christiania: Grøndahl, págs. 197-205.

Aetius [*c*. 150], *Placita*, en H. Diels (ed.): *Doxographi Graeci*. Berolini: Reimeri, 1879.

Aleksandrov, A. D. [1956], «A General View of Mathematics», en A. D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov y M. A. Lavrent'ev (eds.): *Mathematics: its Content*, *Methods and Meaning*. (Traducción inglesa de S. H. Gould, K. A. Hirsch y T. Bartha. Cambridge, Massachusetts: M.I.T. Press, 1963). [Hay traducción castellana de Manuel López Rodríguez: *La Matemática: su contenido, método y significado,* Madrid: Alianza Universidad, 1973.]

Ambrose, A. [1959], «Proof and the Theorem Proved», *Mind*, **68,** págs. 435-445.

Arber, A. [1954], *The Mind and the Eye*. Cambridge: Cambridge University

Press.
Arnauld, A. y Nicole, P. [1724], *La Logique, ou L'Art de Penser*. Lille Publications de la Faculté des Lettres et Sciences Humaines de L'Université de Lille, 1964.
Bacon, F. [1620], *Novum Organum.* Traducción inglesa en R. L. Ellis y J. Spedding (eds.): *The Philosophical Works of Francis Bacon.* Londres Routledge, 1905, págs. 241-387.
Baltzer, R. [1862], *Die Elemente der Matbematik*, vol. 2. Leipzig: Mirzel.
Bartley, W. W. [1962], *Retreat to Commitment.* Nueva York: Alfred A. Knopf.
Becker, J. C. [1869*a*], «Über Polyeder», *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, **14,** págs. 65-76.
Becker, J. C. [1869*b*], «Nachtrag zu dem Aufsätze über Polyeder», *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, **14,** págs. 337-343.
Becker, J. C. [1874], «Neuer Beweis und Erweiterung eines Fundamentalsatzes über Polyederflächen», *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, **19,** págs. 459-60.
Bell, E. T. [1945], *The Development of Mathematics.* Segunda edición. Nueva York: McGraw-Hill.
Bérard, J. B. [1818-19], «Sur le Nombre des Racines Imaginaires des Equations; en Reponse aux Articles de MM. Tédenant et Servois», *Annales de Mathematiques, Pures et Appliquées*, **9,** págs. 345-72.
Bernays, P. [1947], Reseña del Pólya [1945], *Dialectica* **1,** págs. 178-88.
Bolzano, B. [1837], *Wissenschaftslehre*. Leipzig: Meiner, 1914-31.
Bourbaki, N. [1949], *Topologie Général*. Paris: Hermann.
Bourbaki, N. [1960], *Eléments d'Histoire des Mathématiques.* París: Hermann. [Hay traducción castellana de Jesús Hernández Alonso: *Elementos de historia de las matemáticas*, Madrid: Alianza Universidad, 1972; 2.ª edc. aumentada y revisada, 1976.]
Boyer, C. [1939], *The Concepts of Calculus.* Nueva York: Dover, 1949.
Braithwaite, R. B. [1953], *Scientific Explanation.* Cambridge: Cambridge University Press. [Hay traducción castellana de Víctor Sánchez de Zavala: *La explicación científica*, Madrid: Tecnos, 1965.]
Brouwer, L. E. J. [1952], «Historical Background, Principies and Methods of

Intuitionism», *South African Journal of Science*, **49,** págs. 139-46.

Carnap, R. [1937], *The Logical Syntax of Language.* Nueva York y Londres: Kegan Paul. (Traducción revisada de *Logische Syntax der Sprache,* Viena: Springer, 1934.)

Carslaw, H. S. [1930], *Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals.* Tercera edición. Nueva York: Dover, 1950.

Cauchy, A. L. [1813*a*], «Recherches sur les Polyèdres» *Journal de L'Écote* Polytechnique, **9,** págs. 68-86. (Leído en febrero de 1811.)

Cauchy, A. L. [1813*b*], «Sur les Polygones et les Polyèdres», *Journal de L'École Polytechnique,* **9,** págs. 87-98. (Leído en enero de 1812.)

Cauchy, A. L. [1821], *Cours d'Analyse de L'École Royale Polytechnique.* París: de Bure.

Cauchy, A. L. [1826], «Mémoire sur les Développements des Functions en Séries Périodiques», *Mémoires de L'Académie des Sciences,* **6,** págs. 603-12.

Cauchy, A. L. [1853], «Note sur les Séries Convergentes dont les Divers Terms sont des Fonctions Continues d'une Variable Réelle ou Imaginaire entre des Limites Données», *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Academie des Sciences,* **37,** págs. 454-9.

Cayley, A. [1859], «On Poinsot's Four New Regular Solids», *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science,* 4.ª serie, **17,** págs. 123-8.

Cayley, A. [1861], «On the Partitions of a Close», *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science,* 4.ª serie, **21,** págs. 424-8.

Church, A. [1956], *Introduction to Mathematical Logic,* vol. 1. Princeton: Princeton University Press.

Clairaut. A. G. [1741], *Eléments de Géometrie.* París: Gauthier-Villars.

Copi, I. M. [1949], «Modern Logic and the Synthetic *A Priori*», *The Journal of Philosophy,* **46,** págs. 243-5.

Copi, I. M. [1950], «Gödel and the Synthetic *A Priori:* a Rejoinder», *The Journal of Philosophy,* **47,** págs. 633-6.

Crelle, A. L. [1826-7], *Lehrbuch der Elemente der Geometric,* vols. 1 y 2,

Berlín: Reimer.
Curry, H. B. [1951], *Outlines of a Formalist Philosophy of Mathematics.* Amsterdam: North Holland.
Darboux, G. [1874*a*], «Lettre à Houel, 12 Janvier». (Citada en F. Rostand: *Souci d'Exactitude et Scrupules des Mathématiciens.* París: Librairie Philosophique J. Vrin, 1960, pág. 11.)
Darboux, G. [1874*b*], «Lettre à Houel, 19 Février». (Citado en F. Rostand: *Souci d'Exactitude et Scrupules des Mathématiciens.* París: Librairie Philosophique J. Vrin, 1960, pág. 194.)
Darboux, G. [1875], «Mémoire sur les Fonctions Discontinues», *Anuales Scientifiques de L'École Nórmale Supérieur,* segunda serie, **4,** págs. 57-112.
Darboux, G. [1883], «Lettre à Houel, 2 Septembre». (Citado en F. Rostand: *Souci d'Exactitude et Scrupules des Mathématiciens.* París: Librairie Philosophique J. Vrin, 1960, pág. 261.)
Denjoy, A. [1919], «L'Orientation Actuelle des Mathématiques», *Revue du Mois,* **20,** págs. 18-28.
Descartes, R. [1628], *Rules for the Direction of the Mind.* Traducción inglesa en E. S. Haldane y G. R. T. Ross (eds.): *Descartes' Philosophical Works,* vol. 1, Cambridge: Cambridge University Press, 1911. [Hay traducción castellana editada por José Bergua: *Reglas para la dirección del espíritu,* Madrid: Ediciones Ibéricas, sin fecha.]
Descartes, R. [1639], *De Solidorum Elementis.* (Publicado por vez primera en Foucher de Careil: *Oeuvres Inédites de Descartes,* vol. 2. París: August Durand, 1860, págs. 214-34. Para un texto considerablemente mejorado, véase C. Adam y P. Tannery (eds.): *Oeuvres de Descartes,* vol. 10, págs. 257-78 París: Cerf, 1908.)
Dieudonné, J. [1939], «Les Méthodes Axiomatiques Modernes et les Fondements des Mathématiques», *Revue Scientifique,* **77,** págs. 224-32.
Diógenes Laercio [*c.* 200], *Vitae Philosophorum.* Con traducción inglesa de R. D. Hicks. Vol. 2., Londres: Heinemann, 1925. [Hay versión castellana del griego por José Ortiz y Sanz: *Vida de los filósofos más ilustres,* Madrid: Espasa-Calpe, 1949.]
Dirichlet, P. L. [1829], «Sur la Convergence des Séries Trigonométriques que

servent à représenter une Fonction Arbitraire entre des Limites Données», *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik,* **4,** págs. 157-69.

Dirichlet, P. L. [1837], «Über die Darstellung Ganz Villkürlicher Funktionen durch Sinus- und Cosinusreihen», en H. W. Dove y L. Moser (eds.): *Repertorium der Physik,* **1,** págs. 152-74.

Dirichlet, P. L. [1853], «Letter to Gauss, 20 February, 1853», en L. Kronecker (ed.): *Werke,* vol. 2, págs. 285-7. Berlín: Reiner, 1897.

du Bois-Reymond, P. D. G. [1875], «Beweis, das die Coefficienten der Trigonometrischen Reihe $f(x) = \sum_{p=0}^{p=\infty} (a_p \cos px + b_p \sin px)$ die werte

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha\, f(\alpha), \quad a_p = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha\, f(\alpha)\cos p\alpha$$
$$b_p = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha\, f(\alpha)\sin p\alpha$$

haben, jedesmal wenn diese Integrale Endlich un Bestmmt sind», *Abbandlungen der Königlich-bajerischen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-Physikalischen Classe,* **12,** 1, págs. 117-166.

du Bois-Reymond, P. D. G. [1876], «Untersuchungen über die Convergenz und Dibergenz der Fourier'schen Darstellungsformeln», *Abbandlungen der Königlich-bajerischen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-Physikalischen Classe,* **12,** 2, págs. i-xxxiv y 1-102.

du Bois-Reymond, P. D. G. [1879], «Erläuterungen zu den Anfangsgründen der Variationenrechnung», *Mathematische Annalen,* **15,** págs. 282-315, 564-76.

du Bois-Reymond, P. D. G. [1885], «Über den Begriff der Länge einer Curve», *Acta Mathematica,* **6,** págs. 167-8.

Dyck, W. [1888], «Beiträge zur Analysis Situs», *Mathematische Annalen,* **32,** págs. 457-512.

Einstein, A. [1953], «Letter to P. A. Schilpp». Publicada en P. A. Schilpp: «The Abdication Philosophy», *Kant Studien,* **51,** págs. 490-1, 1959-60.

Euler, L. [1756-7], «Specimen de usu Observationum in Mathesi Pura», *Non*

Commentarii Academiae Scientriarum Petropolitanae, **6,** págs. 185-230. Sumario editorial, págs. 19-21.

Euler, L. [1758*a*], «Elementa Doctrinae Solidorum», *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae,* **4,** págs. 109-40. (Leído en noviembre de 1750.)

Euler, L. [1758*b*], «Demonstrado Nonnullarum Insignium Proprietatus Quibus Solida Hedris Planis Inclusa sunt Praedita», *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae,* **4,** págs. 140-60. (Leído en septiembre de 1751.)

Eves, H. y Newson, C. V. [1958], *An lntroduction to the Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics.* Nueva York: Rinehart.

Félix, L. [1957], *L'Aspect Moderne des Mathématiques.* (Traducción inglesa de J. H. Hlavaty y F. H. Hlavaty: *The Modern Aspect of Mathematics,* Nueva York: Basic Books, 1960.)

Forder, H. G. [1927], *The Foundations of Euclidean Geometry.* Nueva York: Dover, 1958.

Fourier, J. [1808], «Mémoire sur la Propagation de la Chaleur dans les Corpes Solides (Extrait)», *Nouveau Bulletin des Sciences, par la Société Philomatique de Paris,* **1,** págs. 112-16.

Fréchet, M. [1928], *les Espaces Abstraits.* París: Gauthier-Villars.

Fréchet, M. [1938], «L'Analyse Genérale et la Question des Fondements», en F. Gonseth (ed.): *Les Entretiens de Zürich, sur les Fondements et la Méthode des Sciences Mathématiques,* Zurich: Leemans Frères et Cie, 1941, págs. 53-73.

Frege, G. [1893], *Grundgesetze der Arithmetik,* col. 1, Hildesheim: George Olms, 1962.

Gamow, G. [1953], *One, Two, Three… Infinity.* Nueva York: The Viking Press. Hay traducción castellana: *Uno, dos, tres… infinito.*

Gauss, C. F. [1813], «Disquisitiones Generales Circa Seriem Infinitam

$$1+\frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}\cdot x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}\cdot x\cdot x+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}\cdot x^3+\text{etc.»},$$

en *Werke,* vol. 3, págs. 123-62. Leipzig: Teubner.

Gergonne, J. D. [1818], «Essai sur la Théorie des Definitions», *Annales de*

Mathématiques, Pures et Appliquées, **9,** págs. 1-35.

Goldschmidt, R. [1933], «Some Aspects of Evolutions», *Science,* **78,** págs. 539-47.

Grunert, J. A. [1827], «Einfacher Beweis der von Cauchy und Euler Gefundenen Sätze von Figurennetzen und Polyedern», *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik,* **2,** pág. 367.

Halmos, P. [1950], *Measure Theory.* Nueva York y Londres: Van Nostrand Reinhold.

Hankel, H. [1883], «Untersuchungen über die Unendlich oft Oscillierenden und Unstetigen Functionen», *Mathematiscbe Annalen,* **20,** págs. 63-112.

Hardy, G. H. [1918], «Sir George Stokes and the Concept of Uniform Convergence», *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society,* **19,** págs. 148-56.

Hardy, G. H. [1928], «Mathematical Proof», *Mind,* **38,** págs. 1-25.

Haussner, R. (ed.) [1906], *Abbandlungen über die Kegelmassigen Sternkórper.* Ostwald's Klassiker der Exactcn Wissenschften, n.° 151, Leipzig: Engelmann.

Heath, T. L. [1925], *The Thirteen Books of Euclid's Elements.* Segunda edición. Cambridge: Cambridge University Press.

Hempel, C. G. [1945], «Studies in the Logic of Confirmation», 1 y 2, *Mind,* **54,** págs. 1-26 y 97-121.

Hermite, C. [1893], «Lettre à Stieltjes, 20 Mai 1893», en B. Baillaud y H. Bourget (eds.): *Correspondance d'Hermite et de Stieltjes,* **2,** págs. 317-19. París: Gauthiers-Villars, 1905.

Hessel, J. F. [1832], «Nachtrag zu dem Euler'schen Lehrsatze von Polyedern», *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik,* **8,** págs. 13-20.

Heyting, A. [1939], «Les Fondements des Mathématiques du Point de Vue Intuitioniste», en F. Gonseth: *Philosophie Mathématique,* París: Hermann, págs. 73-5.

Heyting, A. [1956], *Intuitionism: An Introduction.* Amsterdam: North-Holland. [Hay versión castellana de Víctor Sánchez de Zavala: *Intuicionismo,* Madrid: Tecnos, 1976.]

Hilbert, D. y Cohn-Vossen, S. [1932], *Énscbauliche Geometrie.* Berlín:

Springer. Traducción inglesa de P. Nemenyi: *Geometry and the Imagination.* Nueva York: Chelsea [1956].

Hobbes, T. [1651], *Leviathan,* en W. Molesworth (ed.): *The English Works of Thomas Hobbes,* vol. **3.** Londres: John Bohn, 1939.

Hobbes, T. [1656], *The Questions Concerning Liberty, Necessity and Chance,* en W. Molesworth (ed.): *The English Works of Thomas Hobbes,* vol. 5. Londres: John Bohn, 1841.

Hölder, O. [1924], *Die Mathematische Methode.* Berlín: Springer.

Hoppe, R. [1879], «Ergänzung des Eulershen Satzes von den Polyedern», *Archiv der Mathematik und Physik,* **63,** págs. 100-3.

Husserl, H. [1900], *Logische Untersuchungen,* vol. 1. Tubinga: Niemeyer, 1968. [Hay versión castellana de Manuel García Morente y José Gaos: *Investigaciones Lógicas,* Madrid: Revista de Occidente, 1929.]

Jonquières, E. de [1890*a*], «Note sur un Point Fondamental de la Théorie des Polyédres», *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences,* **110,** págs. 110-15.

Jonquières, E. de [1890*b*], «Note sur le Théoreme d'Euler dans la Théorie des Polyèdres», *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences,* **110,** págs. 169-73.

Jordan, C. [1866*a*], «Recherches sur les Polyèdres», *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik,* **66,** págs. 22-85.

Jordan, C. [1866*b*], «Résumé de Recherches sur la Symétrie des Polyèdres non Eulériens». *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik,* **66,** págs. 86-91.

Jordan, C. [1881], «Sur la Série de Fourier», *Comtes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences,* **92,** págs. 228-33.

Jordan, C. [1887], *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique,* vol. 3, primera edición. París: Gauthier-Villars.

Jordan, C. [1893], *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique,* vol. 1, segunda edición. París: Gauthier-Villars.

Jourdain, P. E. B. [1912], «Note on Fourier's Influence on the Conceptions of Mathematics», *Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematics,* **2,** págs. 526-7.

Kant, I. [1781], *Critik der Reinen Vernunft,* Primera edición.

Kepler, I. [1619], *Harmonice Mundi*, en M. Caspar y W. von Dyck (eds.): *Gesammelte Werke*, vol. 6. Munich: C. H. Beck. 1940.

Knopp, K. [1928], *Theory and Application of Infinite Series.* (Traducido por R. C. Young, Londres y Glasgow: Blackie, 1928.)

Lakatos, I. [1961], Essays in the Logic of Mathematical Discovery, Tesis doctoral no publicada, Cambridge.

Lakatos, I. [1962], «Infinite Regress and the Foundations of Mathemátics», *Aristotelian Society Supplementary Volumes*, **36,** págs. 155-84.

Lakatos, I. [1970], «Falsification and the Methodology of Scientific Research Programmes», en I. Lakatos y A. Musgrave (eds.): *Cristicism and the Growth of Knowledge*, Cambridge: Cambridge University Press, págs. 91-196. [Hay versión castellana de Francisco Hernán: «La falsación y la metodología de los programas de investigación científica», en I. Lakatos y A. Musgrave (eds.), *La Crítica y el desarrollo del Conocimiento* (Introducción de Javier Muguerza). Barcelona: Grijalbo, 1975, págs. 203-344.]

Landau, E. [1930], *Grundlagen der Analysis.* Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft.

Lebesgue, H. [1923], «Notice sur le Vie et les Travaux de Camille Jordan», *Memoires de l'Académie de l'Institute de France*, **58,** págs. 34-66. Reimpreso en H. Lebesgue, *Notices d'Histoire des Mathématiques*, Ginebra, págs. 40-65.

Lebesgue, H. [1928], *Leçons sur l'Integration et la Recherche des Fonctions Primitives.* París: Gauthier-Villars. (Segunda edición aumentada de la versión original de 1905.)

Legendre, A.-M. [1809], *Eléments de Géometrie.* Octava edición. París: Didot. La primera edición apareció en 1794.

Leibniz, G. W. F. [1687], «Letter to Bayle», en C. I. Gerhardt (ed.): *Philosophische Schriften*, vol. 3. Hildesheim: George Olms [1965], pág. 52.

Lhuilier, S. A. J. [1786], *Exposition Élémentaire des Principes des Calculs Supérieurs.* Berlín: G. J. Decker.

Lhuilier, S. A. J. [1812-13*a*], «Memoire sur la Polyédrométrie», *Annales de Mathématiques, Pures et Appliquées,* **3,** págs. 168-91.

Lhuilier, S. A. J. [1812-13*b*], «Mémoire sur les Solides Réguliers», *Annales de Mathématiques, Pures et Appliquées,* **3,** págs. 233-7.

Listing, J. B. [1861], «Der Census Räumlicher Complexe», *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen,* **10,** págs. 97-182.

Loeve, M. [1955], *Probability Theory*. Nueva York: Van Nostrand.

Matthiessen, L. [1863], «Über die Scheinbaren Einschränkungen des Euler'schen Satzes von den Polyedern», *Zeitschrift für Mathematik und Physik,* **8,** págs. 449-50.

Meister, A. L. F. [1771], «Generalia de Genesi Figurarum Planarum et inde Pendentibus Earum Affectionibus», *Novi Commentarii Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis,* **1,** págs. 144-80.

Menger, K. [1928], *Dimensionstheorie.* Berlín: Teubner.

Möbius, A. F. [1827], *Der Barycentrische Calcul.* Hildesheim: George Olms, 1968.

Möbius, A. F. [1865], «Über die Bestimung des Inhaltes eines Polyeders», *Berichte Königlicb-Sächsischen Gesellschaft der Wissenchaften, Mathematisch-Physikalische Classe,* **17,** págs. 31-68.

Moigno, F. N. M. [1840-1], *Leçons de Calcul Differentiel et de Calcul Integral,* 2 vols. París: Bachelier.

Moore, E. H. [1902], «On the Foundations of Mathematics», *Science,* **17,** págs. 401-16.

Morgan, A. de [1842], *The Differential and Integral Calculus.* Londres: Baldwin and Gadock.

Munroe, M. E. [1953], *Introduction to Measure and Integration.* Cambridge, Massachusetts: Addison-Wesley.

Neumann, J. von [1947], «The Mathematician», en Heywood, R. B. (ed.): *The Works of the Mind.* Chicago: Chicago University Press.

Newton, I. [1717], *Opticks.* Segunda edición. Londres: Dover, 1952. [Hay edición castellana de Carlos Solís, *Óptica o Tratado de las reflexiones, refracciones, inflexiones y colores de la luz.* Madrid: Alfaguara, 1977.]

Olivier, L. [1826], «Remerkungen über Figuren, die aus Behebigen, von Geraden Linien Umschlossenen Figuren Zusammengesetzt sind», *Journal für die Reine und Angewandte Matematik,* **1,** págs. 227-31.

Pascal, B. [1659], *Les Réflexions sur la Géometrie en Général (De l'Ésprit Geométrique et de l'Art de Persuader).* En J. Chevalier (ed.): *Oeuvres Completes.* París: La Librairie Gallimard, 1954, págs. 575-604.

Peano, G. [1894], *Notations de Logique Mathématique.* Turín: Guadagnini.

Pierpoint, J. [1905], *The Theory of Functions of Real Variables,* vol. 1. Nueva York: Dover, 1959.

Poincaré, H. [1893], «Sur la Genéralisation d'un Théoreme d'Euler relatif aux Polyèdres», *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences,* **117,** págs. 144.

Poincaré, H. [1899], «Complément á l'Analysis Situs», *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo,* **13,** págs. 285-343.

Poincaré, H. [1902], *La Science et l'Hypotèse.* París: Flammarion. Traducción inglesa autorizada de G. B. Halsted: *The Foundations of Science,* Lancaster, Pensilvania: The Science Press, 1913, págs. 27-197. [Hay versión castellana de Alfredo B. Besio y José Banfi: *La ciencia y la hipótesis,* Buenos Aires: Espasa-Calpe, 1943.]

Poincaré, H. [1905], *La Valeur de la Science.* París: Flammarion. Traducción inglesa autorizada de G. B. Halsted: *The Foundations of Science,* Lancaster, Pensilvania: The Science Press, 1913, págs. 359-546. [Hay versión castellana de A. B. Besio y J. Banfi: *El Valor de la Ciencia,* Buenos Aires: Espasa-Calpe, 1916.]

Poincaré, H. [1908], *Science et Méthode.* París: Flammarion. Traducción inglesa autorizada de G. B. Halsted: *The Foundations of Science,* Lancaster, Pensilvania: The Science Press, págs. 546-854. [Hay versión castellana de M. García Miranda y L. Alonso: *Ciencia y Método,* Buenos Aires: Espasa-Calpe, 1944.]

Poinsot, L. [1810], «Mémoire sur les Polygones et les Polyèdres», *Journal de l'École Polytechnique,* **4,** págs. 16-48. Leído en Julio de 1809.

Poinsot, L. [1858], «Note sur la Théorie des Polyèdres», *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences,* **46,** págs. 65-79.

Pólya, G. [1954*a*], *How to Solve it.* Princeton: Princeton University Press.

Pólya, G. [1954*b*], *Mathematics and Plausible Reasoning,* vols. 1 y 2. Londres: Oxford University Press. [Hay versión castellana de José Luis Abellán: *Matemáticas y razonamiento plausible,* Madrid: Tecnos, 1966.]

Pólya, G. [1962*a*], *Mathematical Discovery,* 1. Nueva York: Wiley.

Pólya, G. [1962*b*], «The Teaching of Mathematics and the Biogenetic Law», en I. J. Good: *The Scientist Speculates.* Londres: Hainemann, págs. 352-6.

Pólya, G. y Szegó, G. [1927], *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis,* vol. 1. Berlín: Springer.

Popper, K. R. [1934], *Logik der Forschung.* Viena: Springer.

Popper, K. R. [1935], «Letter to the Editor», *Erkenntnis,* **3,** págs. 426-9. Publicado de nuevo en el Apéndice *1 de Popper [1959], págs. 311-14. [Versión castellana, págs. 289-92.]

Popper, K. R. [1945], *The Open Society and its Enemies.* 2 vols., Londres: Routledge and Kegan Paul. [Hay versión castellana de E. Loedel: *La Sociedad abierta y sus enemigos.* Buenos Aires: Paidos, 1957. Reeditado en 1967.]

Popper. K. R. [1947], «Logic Without Assumptions», *Aristotelian Society Proceedings,* **47,** págs. 251-92.

Popper, K. R. [1952], «The Nature of Philosopbical Problems and their Roots in Science», *The British Journal for the Philosophy of Science,* **3,** págs. 124-56. Reimpreso en Popper [1963*b*].

Popper, k. R. [1957], *The Poverty of Historicism.* Londres: Routledge and Kcgan Paul. [Hay versión castellana de Pedro Schwartz: *La miseria del historicisrno,* Madrid: Taurus, 1961. Reeditado por Alianza/Taurus, 1973.]

Popper, K. R. [1959], *The Logic of Scientific Discorery.* Traducción inglesa de [1934]. Londres: Hutchinson. [Hay versión castellana de Víctor Sánchez de Zavala: *La lógica de la investigación científica* Madrid: Tecnos, 1962.]

Popper, K. R. [1963*a*] *Conjectures and Refutations.* Londres: Routledge and Kegan Paul. [Hay versión castellana de N. Míguez, *El desarrollo del conocimiento científico,* Buenos Aires: Paidos. 1967.]

Popper, K. R. [1963*b*], «Science: Problems, Aims, Responsabilities», *Federation of American Societies for Experimental Biology: Federation Proceedings,* **22,** págs. 961-72.

Popper, K. R. [1972], *Objective Knowledge.* Oxford Universty Press. [Hay

versión castellana de Carlos Solis: *Conocimiento objetivo,* Madrid: Tecnos, 1974.]

Pringsheim, A. [1972], «Gundlagen der Allgemeinen Functionenlehre», en M. Burkhardt, W. Wutinger y R. Fricke (eds.): *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften,* vol. 2. Erste Teil, Erste Halbband, págs. 1-53. Leipzig: Teubner.

Quine, W. V. O. [1951], *Mathematical Logic.* Edición revisada. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press. [Hay versión castellana de José Hierro S.-Pescador: *Lógica Matemática,* Madrid: Revista de Occidente, 1972.]

Ramsey, F. P. [1931], *The Foundations of Mathematics and Other Essays.* Editado por R. B. Braithwaite. Londres: Kegan Paul.

Rasching, L. [1891], «Zum Eulerschen Theorem der Polyedrometrie», *Festschrift des Gymnasium Schneeberg.*

Reichardt, H. [1941], «Losung der Aufgabe 274», *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung,* **51,** pág. 23.

Reichenbach, H. [1947], *Elements of Symbolic Logic.* Nueva York: Macmillan.

Reiff, R. [1889], *Geschichte der Unendlichen Reihen.* Tubinga: H. Laupp'schen.

Reinhardt, C. [1885], «Zu Möbius Polyedertheorie. Vorgelegt von F. Klein», *Berichte über die Verbandlungen der Königlich-Sachsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig* **37,** págs. 106-25.

Riemann, B. [1851], *Grundlagen der eine Allgemeine Theorie der Functionen einer Veranderlichen Complexen Grösse.* (Disertación inaugural.) En M. Weber y R. Dedekind (eds.): *Gesammelte Mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass.* Segunda edición. Leipzig: Teubner, 1892, págs. 3-48.

Riemann, B. [1868], «Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine Trigonometrische Reihe», *Abhandlungen der Königlichen Gesellshaft der Wissenschaften zu Götfingen,* **13,** págs. 87-132.

Robinson, R. [1936], «Analysis in Greek Geometry», *Mind,* 45, págs. 464-473.

Robinson, R. [1953], *Plato's Earlier Dialectic.* Oxford: Oxford University

Press.
Rudin, W. [1953], *Principies of Mathematical Analysis.* Primera edición. Nueva York: McGraw-Hill.
Russell, B. [1901], «Recent Work in the Philosophv ot Mathematics», *The International Monthly,* **3.** Reimpreso como «Mathematics and the Metaphysicians», en su [1918], págs. 59-74. [Véanse las págs. 83-106 de la traducción castellana.]
Russell, B. [1903]. *Principies of Mathematics.* Londres: Allen and Unwin. [Hay traducción castellana de Juan Carlos Grimberg: *Los Principios de las matemáticas,* Madrid: Espasa-Calpe, 1948: segunda edición, 1967.]
Russell, B. [1918], *Mysticism and Logic.* Londres: Allen and Unwin. [Hay versión castellana de José Rovira Armengol: *Misticismo y Lógica.* Buenos Aires: Paidos, 1951.]
Russell, B. [1959], *My Philosophical Development.* Londres: Allen and Unwin. [Hay versión castellana de Juan Novella Domingo: *La evolución de mi pensamiento filosófico,* Madrid: Aguilar, 1963, Reimpreso en Madrid: Alianza Editorial 1965.]
Russell. B. y Whitehead, A. N. [1910-13], *Principia Mathematica.* Vol. 1, 1910; vol. 2, 1912; vol. 3, 1913. Cambridge University Press.
Saks, S. [1933], *Théorie de l'Integrale.* Traducción inglesa de L. C. Young: *Theory of the Integral.* Segunda edición. Nueva York: Hafner, 1937.
Schläfli, L. [1852], «Theorie der Vielfachen Kontinuität». Publicado postumamente en *Neue Denkenschriften der Allgemeinen Schweizerischen Gesellschaft für die Gesamten Naturwissenschaften,* **38,** págs. 1-237. Zurich, 1901.
Schröder, E. [1862], «Über die Vielecke von Gebrochener Seitenzahl oder die Bedeutung der Stern-Polygone in der Geometrie», *Zeitschrift für Mathematik und Physik,* **7,** págs. 55-64.
Seidel, P. L. [1847], «Note über eine Eigenschaft der Reihen, welche Discontinuirliche Functionen Darstellen», *Abbandlungen der Mathematisch-Physikalischen Klasse der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften,* **5,** págs. 381-93.
Sexto Empírico, [*c.* 190], *Against the Logicians.* Texto griego con traducción inglesa de R. G. Bury. Londres: Heinemann, 1933.

Sommerville, D. M. Y. [1929], *An lntroduction to the Geometry of N Dimensions.* Londres: Dover, 1958.

Steiner, J. [1826], «Leichter Beweis eines Stereometrischen Satzes von Euler», *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik,* **1,** págs. 364-7.

Steinhaus, H. [1960], *Mathematical Snapshots.* Edición corregida y aumentada. Nueva York: Oxford University Press.

Steinitz, E. [1914-31], «Polyeder und Raumeinteilungen», en W. F. Meyer y H. Mohrmann (eds.): *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften,* vol. 3 AB. 12. Leipzig: Teubner.

Stokes, G. [1848], «On the Critical Values of the Sums of Periodic Series», *Transactions of the Cambridge Philosophical Society,* **8,** págs. 533-83.

Szabó, A. [1958], «"Deiknymi" als Mathematischer Terminus für "Beweisen"» *Maia,* N. S. **10,** págs. 1-26.

Szabó, Á. [1960], «Anfänge des Euklideschen Axiomensystems» *Archive for the History of Exact Sciences,* **1,** págs. 37-106.

Szökefalvi-Nagy, B. [1954], *Valós Függvények és Függevénysorok.* Budapest: Tankönyvkiadó.

Tarski, A. [1930*a*], «Über einige Fundaméntale Begriffe der Mathematik», *Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie,* **23,** Cl. 111, págs. 22-9. Publicado en ingles en H. Woodger (ed.) [1950], págs. 30-7.

Tarski, A. [1956], «Fundamentale Begriffe der Methodologie der Deduktiven Wissenschaften, 1», *Monatshefte für Mathematik und Physik.* 37, págs. 361-404. Publicado en inglés en H. Woodger (ed.), [1956], págs. 60-109.

Tarski, A. [1935], «On the Concept of Logical Consequence». Publicado en Woodger (ed.) [1956], págs. 409-20. Este artículo se leyó en París en 1933.

Tarski, A. [1941], *lntroduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences.* Segunda edición. Nueva York: Oxford University Press, 1946. (Se trata de una versión parcialmente corregida y aumentada de *On Mathematical Logic and Deductive Method,* publicado en polaco en 1936 y en traducción alemana en 1937.) [Hay versión castellana de T. R.

Bachiller y J. R. Fuentes: *Introducción a la Lógica y a la metodología de las ciencias deductivas*, Madrid: Espasa-Calpe, 1968.]

Turquette, A. [1950], «Gödel and the Synthetic *A Priori*», *The Journal of Philosophy,* **47,** págs. 125-9.

Waerden, B. L. van der [1941], «Topologie und Uniformisierung der Riemannschen Flachen», *Berichte über die Verhandlungen der Königlich-Sachsischen Gesellschaft der Wissenschften zu Leipzig*, **93,** págs. 147-60.

Whewell, W. [1858], *History of Scientific Ideas.* Vol. 1. (Parte de la tercera edición de *The Philosophy of Inductive Sciences.*)

Wilder, R. L. [1944], «The Nature of Mathematical Proof», *The American Mathematical Monthly,* **52,** págs. 309-23.

Woodger, J. M. (ed.) [1956], *Logic, Semantics, Metamathematics.* Oxford: Clarendon Press.

Young, W. H. [1903-4], «On Non-Uniform Convergence and Term-by-Term Integration of Series», *Proceedings of the London Mathematical Society,* **1,** segunda serie, págs. 89-102.

Zacharias, M. [1914-21], «Elementargeometrie», en W. F. Meyer y H. Mohrmann (eds.): *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften,* **3,** Erste Teil, Zweiter Halbband, págs. 862-1176. Leipzig: Teubner.

Zygmund, A. [1935], *Trigonometrical Series.* Nueva York: Chelsea, 1952.



IMRE LAKATOS (Debrecen, Hungría, 1922 - Londres, 1974). Fue un filósofo de la matemática y la ciencia. Habiendo dejado Hungría en 1956, hizo su primera aparición en la escena internacional con una serie de cuatro artículos aparecidos entre 1963 y 1964 en el *British Journal for the Philosophy of Science,* que fueron reunidos y publicados póstumamente en *Pruebas y refutaciones* (1976). En ellos discute la formación de conceptos matemáticos mediante prueba y análisis. Esta ruptura radical con los enfoques clásicos de la filosofía de las matemáticas despertó suficiente interés como para que Kitcher y Aspray consideraran a Lakatos el iniciador de una nueva tradición revolucionaria en el campo («An Opinionated Introduction», en *History and Philosophy of Modern Mathematics,* 1988). En 1959 Lakatos obtuvo una plaza permanente en el Departamento de Filosofía, Lógica y Método Científico de la London School of Economics and Political Science. Ese departamento estaba dirigido por su fundador, Karl Popper, y la cambiante relación de Lakatos, en última instancia antagonista, con Popper y los popperianos condicionó en gran medida su trabajo. La parte principal de éste consistió en una serie de artículos de gran influyencia en la filosofía de la ciencia. Estos fueron recogidos en dos volúmenes que dos de sus estudiantes,

John Worrall y Gregory Currie, editaron y publicaron tras su fallecimiento. En 1974 Lakatos murió de un ataque al corazón, dejando sus proyectos sobre la filosofía de la ciencia y las matemáticas incompletos.

Notas

[1] Church [1956], I, págs. 76-7. Cf. también Peano [1894], pág. 49 y Russell y Whitehead [1910-13], I, pág. 12. Esto forma parte integrante del programa euclídeo, tal como lo formula Pascal en [1659]: cf. Lakatos [1962], pág. 158. <<

[2] Russell [1901]. Este ensayo se reimprimió como capítulo 5 del Russell [1918], con el título, «Las matemáticas y los metafísicos». En la edición de Penguin de 1953, la cita se halla en la pág. 74. En el Prefacio de su [1918], dice Russell de este ensayo: «Su tono queda en parte explicado por el hecho de que el editor me pidió que hiciese el artículo “lo más romántico que pudiese”». <<

[3] Según Turquette, los enunciados de Gödel carecen de significado ([1950], pág. 129). Turquette argumenta en contra de Copi, quien pretende que, puesto que son *verdades a priori*, aunque no analíticas, refutan la teoría analítica del *a priori* ([1949] y [1950]). Ninguno de ellos se da cuenta de que la peculiar condición de los enunciados gödelianos, desde este punto de vista, consiste en que estos teoremas pertenecen a la matemática informal y que de hecho discuten la condición de las matemáticas informales en un caso particular. <<

[4] Pólya [1945], especialmente pág. 102, así como [1945], [1962]; Bernays [1947], esp. pág. 187. <<

[5] Popper [1934] y también [1945], especialmente pág. 90 (o la cuarta edición, [1962], pág. 97); y también [1957], págs. 147 y sigs. <<

[6] Esto se puede ejemplificar, v. g., con Tarski [1930*a*] y Tarski [1930*b*]. En el primer artículo, Tarski utiliza el término «ciencias deductivas» *explícitamente* como abreviatura de «ciencias deductivas formalizadas». Dice: «Las disciplinas deductivas formalizadas constituyen el campo de investigación de las metamatemáticas, aproximadamente en el mismo sentido en que las entidades espaciales constituyen el campo de investigación de la geometría». Esta formulación matizada recibe en el segundo artículo un curioso giro imperialista: «las disciplinas deductivas constituyen el tema de estudio de la metodología de las ciencias deductivas en un sentido muy semejante a aquel en que las entidades espaciales constituyen el tema de estudio de la geometría y los animales, el de la zoología. Naturalmente, no todas las disciplinas deductivas se presentan en una forma adecuada para ser objetos de la investigación científica. Así, por ejemplo, no son adecuadas aquellas que no descansan en una base lógica definida, las que no poseen reglas de inferencia precisas y aquellas cuyos teoremas se formulan en los términos usualmente inexactos y ambiguos del lenguaje coloquial; en una palabra, aquellas que no están formalizadas. Las investigaciones metamatemáticas se limitan, por tanto, a la discusión de las disciplinas deductivas formalizadas.» La innovación consiste en que, mientras la primera formulación decía que el tema de estudio de la metamatemática eran las disciplinas deductivas formalizadas, la segunda formulación dice que el tema de estudio de la metamatemática se limita a las disciplinas deductivas formalizadas, sólo porque las ciencias deductivas no formalizadas no constituyen en absoluto objetos convenientes de investigación científica. Ello entraña que la prehistoria de una disciplina formalizada no puede ser tema de estudio de una investigación científica, frente a lo que ocurre con la prehistoria en una especie zoológica, que puede constituir el tema de estudio de una teoría de la evolución plenamente científica. Nadie pondrá en tela de juicio que algunos problemas de una teoría matemática sólo se pueden abordar después de que haya sido formalizada, del mismo modo que algunos problemas acerca de los seres humanos (relativos, digamos, a su anatomía)

tan sólo se pueden abordar después de su muerte. Con todo, pocos deducirían de ahí que los seres humanos sólo son «adecuados para la investigación científica» cuando «se presentan en forma “muerta”» y que, por tanto, las investigaciones biológicas se limitan a la discusión de cadáveres. Con todo, no me sorprendería que identificase la biología con el análisis de cadáveres algún discípulo entusiasta de Vesalio, en aquellos días gloriosos de la anatomía primitiva, en los que emergía el nuevo y poderoso método de la disección.

En el Prefacio de su [1941], Tarski amplía su actitud negativa hacia la posibilidad de cualquier tipo de metodología que no sea de los sistemas formalizados: «Un curso sobre metodología de las ciencias empíricas… debe limitarse en gran medida a llevar a cabo evaluaciones y críticas de pasos tentativos y esfuerzos sin éxito». La razón estriba en que las ciencias empíricas no son científicas, ya que Tarski define una teoría científica «como un sistema de enunciados positivamente afirmados, ordenados de acuerdo con determinadas reglas» (ibid.). <<

[7] Uno de los caprichos más peligrosos de la filosofía formalista es el hábito de (1) enunciar algo (correctamente) acerca de sistemas formales; (2) decir después que eso se aplica a «las matemáticas» (algo también correcto, si aceptamos la identificación de las matemáticas con los sistemas formales); (3) consiguientemente, con un cambio subrepticio del significado, se utiliza el término «matemáticas» en el sentido ordinario. Así, Quine dice ([1951], pág. 87) que «eso refleja la situación matemática característica; el matemático se topa con su prueba con una intuición incontrolada y con buena suerte, aunque luego otros matemáticos pueden comprobar su demostración». Mas, a menudo, la comprobación de una prueba *ordinaria* (informal) constituye una empresa muy delicada, y encontrar un «error» exige tanta intuición y suerte como encontrar una prueba: algunas veces, puede llevar décadas, si no siglos, descubrir «errores» en demostraciones informales. <<

[8] Tanto H. Poincaré como G. Pólya proponen aplicar la «ley fundamental biogenética» de E. Haeckel sobre la recapitulación que la ontogenia hace de la filogenia al desarrollo mental y, en particular, al desarrollo mental matemático. (Poincaré [1908], pág. 135 y Pólya [1962*b*].) Para citar a Poincaré: «Los zoólogos sostienen que el desarrollo embriológico de un animal recapitula en breve toda la historia de sus antecesores a lo largo del tiempo geológico. Parece que ocurre lo mismo con el desarrollo mental… Por esta razón, la historia de la ciencia debiera ser nuestra guía principal» (traducción autorizada de C. B. Halsted, pág. 437). <<

[9] Para una discusión de la función de las matemáticas en la controversia dogmático-escéptica, cf. mi [1962]. <<

[10] Quien primero se dio cuenta de ello fue Euler [1758*a*]. Su problema original era el de la clasificación de los poliedros, cuya dificultad se señaló en el sumario editorial: «Mientras que en geometría plana los polígonos *(figurae rectilineae)* se podrían clasificar muy fácilmente según el número de sus lados que, por supuesto, siempre es igual al número de sus ángulos, en estereometría la clasificación de los poliedros *(corpora hedris planis inclusa)* representa un problema mucho más difícil, puesto que el solo número de caras es insuficiente para este fin».

La clave del resultado de Euler fue precisamente la invención de los conceptos de *vértice* y *arista:* fue él quien señaló por vez primera que, además del número de caras, el de *puntos* y *líneas* de la superficie del poliedro determinan su carácter (topológico).

Es interesante que, por un lado, estuviese deseoso de subrayar la novedad de su marco conceptual y que tuviese que inventar el término «*acies*» (arista) en vez del viejo «*latus*» (lado), puesto que *latus* era un concepto poligonal, cuando lo que él quería era uno poliédrico, si bien, por otro lado, mantenía aún el término «*angulas solidus*» (ángulo sólido) para sus vértices puntuales. En época reciente, se ha aceptado generalmente que la prioridad en este resultado pertenece a Descartes. La base de esta pretensión es un manuscrito de Descartes (r. 1939), copiado por Leibniz en París a partir del original en 1675-6 y redescubierto y publicado por Foucher de Careil en 1860. No se debería conceder la prioridad a Descartes sin hacer previamente una cualificación menor. Es cierto que Descartes afirma que el número de ángulos planos es igual a $2\varphi + 2\alpha - 4$, donde por φ entiende el número de caras y por α el de ángulos sólidos. También es cierto que dice que hay el doble de ángulos planos que de aristas *(latera)*. La conjunción de ambos enunciados arroja, por supuesto, la fórmula de Euler. Mas Descartes no vio la utilidad de hacerlo, puesto que seguía pensando en términos de ángulos (planos y sólidos) y caras, y no hizo un cambio revolucionario consciente en los conceptos de vértices 0-dimensionales, aristas 1-dimensionales y caras 2-dimensionales, como base necesaria y suficiente para la plena caracterización

topológica de los poliedros. <<

[11] Euler contrastó bastante concienzudamente la conjetura en busca de consecuencias. La comprobó para el caso de prismas, pirámides y demás. Podría haber añadido que la proposición de que sólo hay cinco cuerpos regulares es también una consecuencia de la conjetura. Otra consecuencia probable es la proposición hasta ahora corroborada de que cuatro colores bastan para pintar un mapa.

La fase de *conjeturar y contrastar* en el caso de $V - A + C = 2$ se discute en Pólya ([1954*b*], vol. 1, las cinco primeras secciones del tercer capítulo, págs. 35-41). Pólya se detuvo ahí, sin ocuparse de la fase de *probar,* aunque señala, por supuesto, la necesidad de una heurística de «problema a probar» ([1945], pág. 144). Nuestra discusión comienza allí donde se detiene Pólya. <<

[12] Euler ([1758*a*], pág. 119 y 124). Pero más tarde ([1758*b*]) propuso una prueba. <<

[13] Esta idea de prueba surge de Cauchy [1813*a*]. <<

[14] La opinión de Delta de que esta prueba establecía el «teorema» más allá de toda duda era compartida por muchos matemáticos en el siglo diecinueve, por ejemplo, Crelle [1826-7], 2, págs. 668-71, Matthiessen [1863], pág. 449, Jonquières [1890*a*] y [1890*b*]. Para citar un pasaje característico: «Tras la prueba de Cauchy, se hizo absolutamente indudable que la elegante relación $V + C = A + 2$ se aplica a todo tipo de poliedros, tal cómo enunció Euler en 1752. En 1811, todas las indecisiones deberían desaparecer». Jonquières [1890*a*], págs. 111-12. <<

[15] La clase es más bien avanzada. Estas dudas no se le ocurrieron a Cauchy, Poinsot y muchos otros excelentes matemáticos del diecinueve. <<

[16] El experimento mental *(deiknymi)* es el patrón de prueba matemática más antiguo; prevalecía en las matemáticas griegas preeuclídeas (cf. Szabó [1958]). Para los matemáticos antiguos, era un lugar común el hecho de que las conjeturas (o teoremas) precediesen a las pruebas en el orden heurístico. Era algo que se seguía de la precedencia heurística del *«análisis»* sobre la *«síntesis»*. (Para una excelente discusión del asunto, véase Robinson [1936].) Según Proclo, «… es… necesario conocer previamente lo que se busca» (Heath [1925], 1, pág. 129). «Dicen que un teorema es lo que se propone con vistas a la demostración de la misma cosa propuesta», dice Pappo (ibid., 1, pág. 10). Los griegos no pensaban mucho en las proposiciones con las que se topaban en la dirección deductiva sin haberlas entrevisto antes. Las denominaban *porismos,* corolarios, resultados accidentales derivados de la prueba de un teorema o de la solución de un problema, resultados que no habían sido directamente buscados, sino que aparecían por azar, como si dijésemos, sin ningún trabajo adicional, constituyendo, como dice Proclo, una especie de hallazgo feliz *(ermaion)* o premio *(kerdos)* (ibid., 1, pág. 278). En el sumario editorial a Euler [1756-7], leemos que los teoremas aritméticos «fueron descubiertos mucho antes de que su verdad fuese confirmada mediante demostraciones rígidas». Tanto Euler como su editor utilizan el moderno término de *«inducción»* para este proceso de descubrimiento, en lugar del viejo de *«análisis»* (ibid.). La precedencia heurística del resultado sobre el argumento, del teorema sobre la prueba, está profundamente enraizada en el folklore matemático. Citemos algunas variaciones sobre un tema familiar: dícese que Crisipo habría escrito a Cleantes: «Limítate a enviarme los teoremas, ya encontraré yo las pruebas» (cf. Diógenes Laercio [*c.* 200], VII, 179). Se dice que Gauss se habría quejado: «Hace mucho tiempo que he obtenido los resultados, pero aún no se cómo voy a llegar a ellos» (cf. Arber [1945], pág. 47), y Riemann: «¡Si sólo tuviese los teoremas! Entonces hallaría las pruebas con bastante facilidad». (Cf. Hölder [1924], pág. 487.) Pólya subraya: «Tiene usted que conjeturar un teorema matemático antes de probarlo», ([1954*b*], vol. 1, pág. vi.).

El término *«cuasi-experimento»* proviene del mencionado sumario editorial a Euler [1753]. Según el editor: «Puesto que hemos de referir los números tan sólo al puro intelecto, difícilmente podemos comprender cómo es que las observaciones y *cuasi-experimentos* pueden ser útiles en la investigación de la naturaleza de los números. Con todo, de hecho, como mostraré aquí con muy buenas razones, las propiedades de los números conocidas hoy día han sido descubiertas en su mayor parte por observación…» (según la traducción de Pólya; en su [1954*b*], 1, pág. 3, atribuye erróneamente la cita a Euler). <<

[17] Al corregir una prueba de Euler de un modo similar, Lhuilier dice que hizo solamente «una observación trivial» ([1812-13*a*], pág. 179). Con todo, el propio Euler eliminó la prueba porque se dio cuenta de la dificultad, sin ser capaz de hacer esa «observación trivial». <<

[18] Cauchy pensaba que la instrucción consistente en hallar en cada etapa un triángulo eliminable, sea eliminando dos aristas y un vértice, sea eliminando una arista, era trivialmente realizable para cualquier poliedro ([1813*a*], pág. 79). Esto se relaciona con su incapacidad para imaginar un poliedro que no sea homeomorfo con la esfera. <<

[19] Este *Contraejemplo 1* lo vio por vez primera Lhuilier ([1812-13*a*], pág. 194). Pero Gergonne, el editor, añadió (pág. 186) que él mismo lo había visto mucho antes del artículo de Lhuilier. No así Cauchy, quien publicó su prueba exactamente un año antes. Este contraejemplo habría de ser descubierto veinte años más tarde por Hessel ([1832], pág. 16). Tanto Lhuilier como Hessel llegaron a su descubrimiento debido a colecciones de minerales en las que descubrieron cristales dobles, en los que el cristal interior no es transparente, aunque sí el exterior. Lhuilier reconoce el estímulo de la colección de cristales de su amigo el Profesor Pictet ([1812-3*a*], pág. 188). Hessel alude a los cubos de sulfuro de plomo encerrados en cristales transparentes de fluoruro de calcio ([1832], pág. 16). <<

[20] La *Definición 1* aparece por vez primera en el siglo dieciocho; por ejemplo: «recibe el nombre de *sólido poliédrico* o simplemente *poliedro,* cualquier sólido limitado por planos o caras planas» (Legendre [1809], pág. 160). Euler da una definición similar ([1758a]). Al definir cubo, octaedro, pirámide, prisma, Euclides no define el término general del poliedro, aunque lo utiliza ocasionalmente (por ejemplo, Libro XII, Problema Segundo, Prop. 17). <<

[21] Encontramos implícitamente la *Definición 2* en uno de los artículos de Jonquières leído ante la Academia Francesa, en contra de aquellos que pretendían refutar el teorema de Euler. Estos artículos son un tesoro de técnicas de exclusión de monstruos. Truena contra el monstruoso par de cubos encajados de Lhuilier: «Tal sistema no es realmente un poliedro, sino un par de poliedros diferentes, independientes el uno del otro… Un poliedro, al menos desde el punto de vista clásico, merece tal nombre tan sólo si, antes de nada, un punto puede moverse continuamente por toda su superficie; aquí no ocurre tal cosa… Por tanto, podemos descartar la primera excepción de Lhuilier» ([1890*b*], pág. 170). Esta definición, al contrario de la Definición 1, la aceptan perfectamente los topólogos analíticos que no están en absoluto interesados en la teoría de los poliedros en cuanto tal, sino tan sólo como auxiliar de la teoría de superficies. <<

[22] A Lhuilier se le escaparon los *Contraejemplos 2a* y *2b*, siendo descubiertos por vez primera tan sólo por Hessel ([1832], pág. 13). <<

[23] La *Definición 3* aparece por primera vez para excluir los tetraedros gemelos, en Möbius ([1865], pág. 32). Hallamos su engorrosa definición reproducida en algunos libros de texto modernos al modo autoritario usual de «lo tomas o lo dejas»; la historia de su trasfondo de exclusión de monstruos (que al menos la explicaría) no se cuenta (por ejemplo, Hilbert y Cohn-Vossen [1956], pág. 290). <<

[24] La *Definición P,* según la cual la eulerianidad sería una característica definitoria de los poliedros, fue sugerida de hecho por R. Baltzer: «Los poliedros ordinarios se denominan algunas veces (siguiendo a Hessel) poliedros eulerianos. Sería más apropiado hallar un nombre especial para los poliedros no-genuinos *(uneigentliche)*» ([1862], vol. 2, pág. 207). La referencia a Hessel no es justa, pues Hessel usaba el término «euleriano» simplemente como abreviatura de poliedro en el que se cumple la relación de Euler, en contradistinción con los no-eulerianos ([1832], pág. 19). Para la *Def. P* véase también la cita de Schläfli en la nota [25], más abajo. <<

[25] El primero en discutir el «erizo» fue Kepler en su teoría cosmológica ([1619], *Lib.* II, XIX y XXVI, pág. 72 y págs. 82-3, y *Lib.* V, *Cap.* I, pág., 293, *Cap.* III, pág. 299 y *Cap.* IX, XLVII). El nombre «erizo» es de Kepler *(«cui nomen Echino feci»).* La fig. 7 está copiada de su libro (pág. 79), que tiene también otro dibujo en la pág. 293. Poinsot lo descubrió independientemente y fue él quien señaló que no se le aplica la fórmula de Euler ([1810], pág. 48). El nombre ahora usual de «pequeño dodecaedro estrellado» pertenece a Cayley ([1859], pág. 125). Schläfli admitió los poliedros estrellados en general, pero con todo, rechazó por monstruoso nuestro pequeño dodecaedro estrellado. Según él: «No se trata de un poliedro genuino, ya que no satisface la condición $V - A + C = 2$» ([1852], § 34). <<

[26] La disputa acerca de si se debiera o no definir los polígonos de modo que incluyesen los polígonos estrellados (*Def. 4* o *Def. 4'*) es muy antigua. El argumento expresado en nuestro diálogo (que los polígonos estrellados se tornan en polígonos ordinarios cuando se incluyen en un espacio de dimensiones superiores) constituye un argumento topológico moderno; pero se pueden presentar muchos otros. Así, Poinsot, al defender sus poliedros estrellados, argumentaba en su favor con razones sacadas de la geometría analítica: «… todas estas distinciones (entre poliedros "ordinarios" y "estrellados") son más aparentes que reales y desaparecen completamente en el tratamiento analítico, donde las diversas especies de polígonos son totalmente inseparables. A la arista de un polígono regular le corresponde una ecuación con raíces reales que suministra simultáneamente las aristas de todos los polígonos regulares del mismo orden. Así, no es posible obtener las aristas de un heptágono regular inscrito sin hallar al mismo tiempo aristas de heptágonos de la segunda y tercera especie. Conversamente, dada la arista de un heptágono regular, se puede determinar el radio de un círculo en el que se pueda inscribir, aunque al llevarlo a cabo, se encontrarán tres círculos diferentes correspondientes a las tres especies de heptágono que se pueden construir sobre la arista dada; lo mismo ocurre para los demás polígonos. Por tanto, está justificado otorgar el nombre de "polígono" a estas nuevas figuras estrelladas» ([1810], pág. 26). Schröder utiliza el argumento hankeliano: «La extensión a fracciones racionales del concepto potencia originalmente asociado tan sólo con los enteros ha resultado muy fructífero en álgebra; ello sugiere que tratemos de hacer lo mismo en geometría siempre que se presente la oportunidad…» ([1862], pág. 56). Muestra a continuación que podemos hallar una interpretación geométrica del concepto de polígono de *p/q* lados en los polígonos estrellados. <<

[27] La pretensión de Gamma, en el sentido de que puede definir el área de los polígonos estrellados, no es un farol. Algunos de aquellos que defendían el concepto amplio de polígono resolvieron el problema proponiendo un concepto más amplio de área de un polígono. Hay un modo especialmente obvio de hacerlo en el caso de los polígonos estrellados regulares. Podemos tomar el área del polígono como la suma de las áreas de los triángulos isósceles que unen el centro del círculo inscrito o circunscrito con los lados. En este caso, naturalmente, algunas «porciones» del polígono estrellado contarán más de una vez. En el caso de los polígonos estrellados irregulares, en los que no tenemos ningún punto señalado, podemos seguir tomando cualquier punto como origen, tratando los triángulos orientados negativamente como si tuviesen áreas negativas (Meister [1771], pág. 179). Resulta, cosa que se puede esperar perfectamente de un «área», que el área así definida no dependerá de la elección del origen (Möbius [1827], pág. 218). Por supuesto, es muy posible que surjan disputas con quienes estiman que no está justificado denominar «área» al número suministrado por este cálculo, por más que los defensores de la definición de Meister-Möbius la denominasen «*la* definición correcta», la «única científicamente justificada» (notas de R. Haussner [1906], págs. 114-15). El esencialismo ha constituido un aspecto permanente de las disputas sobre definiciones. <<

[28] También encontramos el *Contraejemplo 4* en el artículo clásico de Lhuilier [1812-13*a*], en la pág. 185; una vez más, Gergonne añadió que lo conocía. Sin embargo, no lo conocía catorce años más tarde Grunert ([1827]), ni tampoco Poinsot cuarenta y cinco años después ([1858], pág. 67). <<

[29] Se trata de una paráfrasis de una carta escrita por Hermite a Stieltjes: «Retrocedo con un espasmo de horror ante esta plaga lamentable de funciones que no tienen derivadas» ([1893]). <<

[30] «Las investigaciones acerca de… funciones que violan leyes que uno esperaba que fuesen universales eran consideradas casi como la propagación de la anarquía y el caos allí donde las generaciones pasadas buscaban el orden y la armonía» (Saks [1933], Prefacio). Saks alude aquí a las enconadas batallas entre excluidores de monstruos (¡como Hermite!) y refutacionistas, que caracterizaron en las últimas décadas del siglo diecinueve (y, ciertamente, el comienzo del veinte) el desarrollo de la moderna teoría de las funciones reales, «la rama de las matemáticas que trata de los contraejemplos» (Munroe [1953], Prefacio). La batalla también enconada que se desencadenó más adelante entre los oponentes y protagonistas de la lógica matemática moderna y la teoría de conjuntos fue una continuación directa de ésta. Véanse también las notas [33] y [34]. <<

[31] La *Definición 5* la propuso el infatigable excluidor de monstruos E. de Jonquières, a fin de quitarse de encima el poliedro de Lhuilier con un túnel (el marco de cuadro): «Este complejo poliédrico tampoco es un verdadero poliedro en el sentido ordinario del término, ya que si tomamos un plano cualquiera que pase por un punto arbitrario del interior de uno de los túneles, de modo que atraviese por medio del sólido, la sección resultante estará compuesta por dos polígonos distintos completamente desconexos entre sí. Eso es algo que puede ocurrir en un poliedro ordinario para *algunas* posiciones del plano secante, a saber, es así en el caso de algunos poliedros cóncavos; pero no ocurre con todos ellos» ([1890*b*], págs. 170-1). Habría que preguntarse si Jonquières se habrá dado cuenta de que su *Def. 5* excluye también algunos poliedros esferoides cóncavos. <<

[32] «No hemos de olvidar que lo que hoy día aparece como un monstruo será mañana el origen de una línea de adaptaciones especiales… He subrayado además la importancia de mutaciones raras, aunque extremadamente preñadas de consecuencias, que afectan las proporciones de procesos embriónicos decisivos que podrían dar lugar a lo que podríamos denominar monstruos prometedores, monstruos que podrían iniciar una nueva línea evolutiva en caso de encajar en algún nicho ecológico vacío.» (Goldschmidt [1933], págs. 544 y 547). Fue Karl Popper quien me llamó la atención sobre este artículo. [Cf. K. R. Popper [1972], cap. 7, *Addendum:* págs. 281-4. N. del T.] <<

[33] Parafraseado de Poincaré ([1908], págs. 131-2). El texto original completo es el siguiente: «A veces, la lógica produce monstruos. Desde hace medio siglo, hemos visto surgir una muchedumbre de funciones extrañas que parecen tratar de asemejarse lo menos posible a las funciones honradas que sirven para algo. Se acabó la continuidad o tal vez hay continuidad, pero no derivadas, etc. Más aún, desde el punto de vista lógico, son estas funciones extrañas las que resultan más generales; las que uno se encuentra sin buscarlas ya no aparecen si no es como casos particulares. Para ellas sólo queda un pequeño rincón.

»Antaño, cuando se inventaba una nueva función, lo era para algún fin práctico; hoy día, se inventan expresamente para hacer fracasar los razonamientos de nuestros padres y nunca sacaremos de ellas más que eso.

»Si la lógica fuese la única guía del profesor, sería necesario comenzar con las funciones más generales, es decir, con las más extrañas. El principiante tendría que ponerse a lidiar con semejante museo teratológico…» (según la traducción autorizada de G. B. Halsted, págs. 435-436). Poincaré discute el problema con respecto a la situación en la teoría de las funciones reales, pero no hay ninguna diferencia con nuestro caso. <<

[34] Parafraseado de Denjoy ([1919], pág. 21). <<

[35] Bérard ([1818-19], pág. 347 y 349). <<

[36] Hessel [1832], pág. 13. Hessel descubrió las «excepciones» de Lhuilier en 1832. Nada más haber presentado su manuscrito se topó con Lhuilier [1812-13*a*]. Con todo, decidió no retirar el artículo, la mayoría de cuyos resultados habían sido ya publicados, porque pensaba que la cuestión debería volver a sus cauces, a los «recientes autores», ignorando estas excepciones. Por cierto, que uno de esos autores resultó ser el editor de la revista a la que Hessel entregó el artículo: A. L. Crelle. En su libro de texto [1826-7], «probó» que el teorema de Euler era verdadero para *todos* los poliedros (vol. 2, págs. 668-71). <<

[37] Matthiessen ([1863], pág. 449). Matthiessen alude aquí al *Lehrbuch der Geometrie* de Heis y Eschweiler y al *Lehrbuch der Stereometrie* de Grunert. Con todo, Matthiessen no resuelve el problema al modo de Eta, mediante exclusión de monstruos, sino al modo de Ro, mediante ajuste de monstruos (cf. nota [57]). <<

[38] Esto es de la introducción de Cauchy a su célebre [1821]. <<

[39] Lhuilier y Gergonne parecen haber estado seguros de que la lista de Lhuilier había enumerado todas las excepciones. Leemos en la introducción a esta parte del artículo: «Será fácil convencerse de que el Teorema de Euler es verdadero en general para todos los poliedros, sean o no convexos, excepto en aquellos casos que se especificarán…» (Lhuilier [1812-13*a*], pág. 177). Leemos luego de nuevo en el comentario de Gergonne: «… las excepciones especificadas, que parecen ser las únicas…» (ibid. pág. 188). *Pero, de hecho, a Lhuilier se le escaparon los tetraedros gemelos, que no fueron descubiertos hasta veinte años más tarde por Hessel* ([1832]). Es digno de señalar que algunos matemáticos de primera fila, incluso con un vivo interés en metodología como Gergonne, pudiesen creer que se puede descansar sobre el método de exclusión de excepciones. Esa creencia es semejante al «método de división» en lógica inductiva, según el cual puede haber una enumeración completa de explicaciones posibles de un fenómeno, con lo que, si podemos eliminarlas todas menos una por el método del *experimentum crucis,* entonces esa queda probada. <<

[40] I. Newton [1717], pág. 380. <<

[41] Abel [1826*a*]. Su crítica parece dirigirse contra el inductivismo euleriano. <<

[42] También es esto una paráfrasis de la carta citada, en la que Abel se ocupaba de eliminar las excepciones de los «teoremas» generales acerca de las funciones, estableciendo así el rigor absoluto. El texto original (incluyendo la cita anterior) es el siguiente: «En Análisis Superior, muy pocas proposiciones se demuestran con un rigor definitivo. *Por todas partes se encuentra uno el modo miserable de inferir de lo especial a lo general,* siendo una maravilla que semejante procedimiento sólo rara vez lleve a las llamadas paradojas. Es realmente muy interesante buscar la razón. En mi opinión, ésta ha de hallarse en el hecho de que *los analistas se han ocupado fundamentalmente de funciones que se pueden expresar como series de potencias. Tan pronto como entran otras funciones, Io que ocurre rara vez, se deja de avanzar* y, tan pronto como se empiezan a sacar conclusiones falsas, se sigue una multitud infinita de errores que se sustentan unos en otros…» (el subrayado es mío). Poinsot descubrió que las generalizaciones inductivas se derrumban «a menudo» en la teoría de los poliedros, así como en teoría de números: «La mayoría de las propiedades son individuales y no obedecen leyes generales» ([1810], § 45). Una característica curiosa de esta advertencia contra la inducción es que atribuye su fracaso ocasional al hecho de que el universo (de hechos, números, poliedros) contiene, por supuesto, excepciones milagrosas. <<

[43] Una vez más, esto está muy de acuerdo con el método de Abel. Del mismo modo, Abel restringió el dominio de teoremas sospechosos sobre funciones a series de potencias. En la historia de la conjetura de Euler, esta restricción a poliedros convexos fue muy corriente. Legendre, por ejemplo, después de dar su definición más bien general de poliedro (cf. nota [20]), presenta una prueba que, por un lado, no se aplica ciertamente a sus poliedros generales, aunque, por otra, se aplica a algunos más que los convexos. Con todo, en una nota adicional en letra pequeña (¿acaso una reflexión posterior, tras haberse encontrado con excepciones nunca enunciadas?) se retira, con modestia aunque a salvo, a los poliedros convexos ([1809], págs. 161, 164, 228). <<

[44] Muchos matemáticos profesionales se sienten perplejos acerca de qué son las pruebas si no demuestran. Por otro lado, saben por experiencia que las pruebas son falibles, si bien saben asimismo, debido a su indoctrinación dogmática, que las pruebas *genuinas* han de ser infalibles. *Los matemáticos aplicados* resuelven normalmente este problema con una vergonzante aunque firme creencia en que las pruebas de los *matemáticos puros* son «completas», por lo que prueban *realmente.* Con todo, los matemáticos puros están mejor enterados y tienen ese respeto sólo hacia las «pruebas completas» de los *lógicos.* Si se les pregunta cuál es entonces la función de sus «pruebas incompletas», la mayoría de ellos se sienten perdidos. Por ejemplo, G. H. Hardy sentía un gran respeto por la exigencia de pruebas formales de los lógicos; pero, cuando quiso caracterizar la prueba matemática «con la que estamos familiarizados los matemáticos profesionales», lo hizo de la siguiente manera: «Estrictamente hablando, no existe eso de prueba matemática; en última instancia no podemos más que señalar;… las pruebas son lo que Littlewood y yo denominamos *gas,* florituras retóricas orientadas a afectar psicológicamente, dibujos en el encerado de la sala de conferencias, ingenios para estimular la imaginación de los alumnos» ([1928], pág. 18). R. L. Wilder piensa que una prueba es «sólo un proceso de contrastación que aplicamos a las sugerencias de nuestra intuición» ([1944], pág. 318). G. Pólya señala que las pruebas, aunque incompletas, establecen conexiones entre los hechos matemáticos, lo que nos ayuda a memorizarlas: las pruebas suministran un sistema mnemotécnico ([1945], págs. 190-1). <<

[45] Matthiessen [1853]. <<

[46] El argumento de que el «erizo» es «realmente» un poliedro euleriano prosaico con 60 caras triangulares, 90 aristas y 32 vértices —*«un hexacontaèdre sans épithète»*— lo propuso el empedernido campeón de la infalibilidad del teorema de Euler, E. de Jonquières ([1890*a*], pág. 115). La idea de interpretar los poliedros estrellados no eulerianos como poliedros eulerianos triangulares no se debe, sin embargo, a Jonquières, sino que posee una historia dramática (cf. la nota [48], más abajo). <<

[47] Nada es más característico de una epistemología dogmática que su teoría del error. En efecto, si ciertas verdades son manifiestas, hay que explicar cómo se puede uno equivocar acerca de ellas; en otras palabras, por qué las verdades no son manifiestas para todos. Según su teoría particular del error, cada epistemología dogmática ofrece su terapéutica particular para purgar la mente de errores. Cf. Popper [1963*a*], Introducción. <<

[48] No cabe duda de que a Poinsot le lavaron el cerebro en algún momento entre 1809 y 1858. Fue Poinsot quien redescubrió los poliedros estrellados, quien los analizó por vez primera desde el punto de vista de la eulerianidad y quien enunció que algunos de ellos, como nuestro pequeño dodecaedro estrellado, no cumplen la fórmula de Euler ([1810]). Ahora bien, el mismo Poinsot afirma categóricamente en su [1858] que la fórmula de Euler «no sólo es verdadera para los poliedros convexos, sino para poliedros cualesquiera, incluyendo los estrellados» (pág. 67 —Poinsot utiliza el término *polyèdres d'espèce supérieur* para referirse a los estrellados). La contradicción es obvia. ¿Cuál es la explicación? ¿Qué ha ocurrido con los *contraejemplos* a base de poliedros estrellados? La clave está en la primera frase, aparentemente casual, del artículo: «Se puede reducir toda la teoría de poliedros a la teoría de poliedros con caras *triangulares*». Es decir, Poinsot-Alfa sufrió un lavado de cerebro para convertirse en Poinsot-Ro: ahora sólo ve triángulos donde antes veía polígonos estrellados; ahora sólo ve ejemplos allí donde antes veía contraejemplos. La autocrítica ha de ser subrepticia y críptica, ya que en la tradición científica no hay patrones a mano para articular semejantes cambios de chaqueta. Uno se pregunta si se habrá enfrentado alguna vez con caras anulares y, en ese caso, si las reinterpretó conscientemente en términos de su visión triangular.

El cambio de visión no tiene por qué operar siempre en la misma dirección. Por ejemplo, J. C. Becker, en su [1869*a*], fascinado por el nuevo marco conceptual de los dominios simple y múltiplemente conexos (Riemann [1851]), aceptó los polígonos anulares, aunque permaneció ciego a los poliedros estrellados (pág. 66). Cinco años después de su artículo, en el que pretendía haber dado al problema una solución «definitiva», amplió su visión, reconociendo patrones estelar-poligonales y estelar-poliédricos allí donde anteriormente sólo veía triángulos y poliedros triangulares ([1874]). <<

[49] Esto forma parte de la teoría estoica del error, atribuida a Crisipo (cf. Aecio [*c.* 150], IV, 12.4; también Sexto Empírico [*c.* 190], I. 249).

Según los estoicos, el «erizo» formaría parte de la realidad externa que produce una huella sobre el alma: la *phantasia* o *visum.* La persona prudente no asentirá acríticamente (*synkatathesis* o *adsensus*) ante una *phantasia* si no madura previamente en una idea clara y distinta (*phantasia kataléptiké* o *comprehensio*), cosa que no puede ocurrir si es falsa. El sistema de ideas claras y distintas compone la ciencia *(epistèmé)*. En nuestro caso, la huella del «erizo» sobre la mente de Alfa sería el pequeño dodecaedro estrellado, mientras que sobre la de Ro sería el hexacontaedro triangular. Ro diría que la visión poliédrico-estelar de Alfa no puede madurar en forma de una idea clara y distinta, ya que, obviamente, entraría en conflicto con la fórmula «probada» de Euler. Así, la interpretación poliédrico-estelar fallaría, tornándose clara y distinta la única alternativa; a saber, la interpretación triangular. <<

[50] Se trata de una crítica escéptica normal de la afirmación estoica de que ellos pueden distinguir la *phantasia* de la *phantasia kataléptiké* (v. g., Sexto Empírico [*c.* 190], I, 405). <<

[51] Kepler [1619], *Lib*. II, *Propositio* XXVI. <<

[52] Se trata de una exposición bastante fiel de la opinión de Kepler. <<

[53] Lhuilier se dio cuenta del *Contraejemplo 6* ([1812-13*b*], pág. 186); ¡por esta vez Gergonne admite la novedad de su descubrimiento! Pero, casi cincuenta años más tarde, Poinsot no había oído hablar de el ([1858]), mientras que Matthiessen ([1863]) y Jonquières, ochenta años después ([1890*b*]), lo trataron como un monstruo. (Cf. las notas [48] y [57]). Los primitivos excluidores de excepciones del siglo diecinueve lo incluyeron entre las curiosidades, junto con otras excepciones: «Como ejemplo, se muestra muchas veces el caso de la pirámide de tres lados adosada a la cara de un tetraedro, de modo que ninguna arista de la primera coincida con una arista del último. "En este caso, lo que es bastante raro, $V - A + C = 3$" es lo que aparece escrito en mi libreta de notas. Y con eso se acaba el asunto». (Matthiessen [1863], pág. 449.) Los matemáticos modernos tienden a olvidar las caras anulares, cosa que puede ser irrelevante para la clasificación de variedades, aunque puede tornarse relevante en otros contextos. Steinhaus dice en su [1960]: «Dividamos el globo en F países (consideraremos los *mares* y *océanos* como tierra). Tendremos entonces $V + C = A + 2$, sea cual sea la situación política» (pág. 273). Con todo, se pregunta uno si Steinhaus destruiría Berlín occidental o San Marino simplemente porque su existencia refuta el teorema de Euler. (Aunque, por supuesto, puede evitar que mares como el Baikal caigan completamente en un país, definiéndolos como *lagos*, puesto que ha dicho que sólo los mares y océanos han de tomarse como tierra.) <<

[54] «… La memoria de Lhuilier consta de dos partes *muy distintas*. En la primera, el autor ofrece una prueba original del teorema de Euler. En la segunda, su intención es señalar las excepciones a que está sujeto el teorema». (Gergonne: comentario editorial sobre el artículo de Lhuilier en Lhuilier [1812-13*a*], pág. 172; el subrayado es mío.)

M. Zacharias, en su [1914-31], da una descripción acrítica, aunque fidedigna, de esta compartimentación: «En el diecinueve, los geómetras, además de hallar nuevas pruebas del teorema de Euler, estaban dedicados a establecer las excepciones que sufre bajo ciertas condiciones. Tales excepciones las enunció, por ejemplo, Poinsot. S. Lhuilier y F. Ch. Hessel trataron de clasificar las excepciones…» (pág. 1052). <<

[55] Hardy, Littlewood, Wilder y Pólya parecen haber pasado por alto este punto (véase la nota [44]). <<

[56] Este patrón normal es esencialmente el descrito en la obra clásica de Pólya y Szegö [1927], pág. vii: «Habría que escrutar cada prueba para ver si de hecho se han utilizado todos los supuestos; habría que tratar de obtener la misma consecuencia a partir de un número menor de suposiciones… y no habría que darse por satisfecho hasta que los contraejemplos muestren que se ha llegado al límite de las posibilidades». <<

[57] Esta «soldadura» de dos poliedros por aristas ocultas la defiende Jonquières ([1890*b*], págs. 171-2), quien utiliza la exclusión de monstruos contra las cavidades y túneles y el ajuste de monstruos contra los cubos con cresta y los poliedros estrellados. Matthiessen [1863] fue el primer proponente del uso de ajuste de monstruos en defensa del teorema de Euler. Utiliza consistentemente el ajuste de monstruos: consigue mostrar aristas y caras ocultas para explicar todo lo que no sea euleriano, incluso los poliedros con túneles y cavidades. Mientras que la soldadura de Jonquières consiste en una triangulación completa de la cara anular, Matthiessen suelda con economía, dibujando tan sólo el número mínimo de aristas que divida la cara en sub-caras simplemente conexas. (Fig. 14.)

Matthiessen posee una notable confianza en su método de convertir contraejemplos revolucionarios en burgueses ejemplos eulerianos bien ajustados. Pretende que «cualquier poliedro se puede analizar de modo que corrobore el teorema de Euler…» Enumera las pretendidas excepciones señaladas por el observador superficial y, a continuación, afirma: «En cada uno de esos casos, podemos mostrar que el poliedro posee caras y aristas ocultas que, si se tienen en cuenta, dejan impoluto el teorema $V - A + C = 2$, incluso en el caso de esos ejemplos aparentemente recalcitrantes».

Sin embargo, la idea de que se pueden transformar en eulerianos algunos poliedros no eulerianos, mediante el expediente de dibujar las caras o aristas adicionales, no surge de Matthiessen, sino de Hessel. Este ejemplifica esto con tres casos en los que utiliza bellas figuras ([1832], págs. 14-5). Con todo, no utilizaba el método para «ajustar», sino, todo lo contrario, para «elucidar las excepciones», mostrando «poliedros un tanto similares para los cuales es válida la ley de Euler». <<

[58] Este último lema es innecesariamente fuerte. Para la prueba hubiese bastado con sustituirlo por el lema de que «para el entramado plano triangular que resulta del estirado y triangulación, $V - A + C = 1$». Cauchy no parece haberse dado cuenta de la diferencia. <<

[59] Es obvio que los estudiantes están muy al día de la reciente filosofía social. El término lo acuñó K. R. Popper ([1957], pág. 64). <<

[60] De hecho, tal prueba la propuso por vez primera H. Reichardt ([1941], pág. 23). Cf. también B. L. van der Waerden [1941], Hilbert y Cohn-Vossen estaban satisfechos con que la verdad de la afirmación de Gamma es «fácil de ver» ([1932], pág. 292 de la traducción inglesa). <<

[61] Pólya ([1945], pág. 142). <<

[62] Esta última frase está sacada del interesante artículo de Alice Ambrose ([1959], pág. 438). <<

[63] Cf. la nota [16]. La metáfora de la «cremallera» la inventó R. B. Braithwaite; sin embargo, sólo habla de cremalleras «lógicas» y «epistemológicas» y no de cremalleras «heurísticas» ([1953], pág. 352). <<

[64] El erizo y el cilindro se discutieron más arriba, págs. 33 y 48 <<

[65] La exclusión de monstruos en defensa del teorema constituye un patrón importante en matemáticas informales: «¿Qué es lo que está mal en los ejemplos en los que falla la fórmula de Euler? ¿Qué condiciones geométricas que hagan más preciso el significado de *V*, *A* y *C* asegurarán la validez de la fórmula de Euler?» (Pólya [1945], 1, ejercicio 29). El cilindro se da en el ejercicio 24, siendo la respuesta: «… una arista… debería terminar en esquinas…» (pág. 225). Pólya lo formula en general: «La situación frecuente en matemáticas es la siguiente: ya se ha formulado un teorema y hemos de dar un significado más preciso a los términos en los que se formula, a fin de hacerlo estrictamente correcto» (pág. 55). <<

[66] Los contraejemplos locales y no globales se discutieron en las págs. 26-29. <<

[67] Véase la pág. 58. <<

[68] Véase la pág. 51. <<

[69] Los *enunciados vacíamente verdaderos* de Gamma constituyeron una importante innovación del siglo diecinueve. Su trasfondo problemático aún no ha sido desentrañado. <<

[70] «Euclides… utiliza un axioma del que es totalmente inconsciente» (Russell [1903], pág. 407). «Hacer *[sic]* una suposición oculta» constituye una expresión corriente entre matemáticos y científicos. Véase también la discusión que hace Gamow de la prueba de Cauchy ([1953], pág. 56) o las consideraciones de Eves y Newsom sobre Euclides ([1958], pág. 84). <<

[71] Véase la pág. 58. <<

[72] Los buenos libros de texto de matemáticas informales especifican normalmente su «taquigrafía», es decir, aquellos lemas, verdaderos o falsos, que consideran tan triviales como para que no merezca la pena mencionarlos. La expresión normal en estos casos es «suponemos que el lector está *familiarizado* con los lemas del tipo *x*». La cantidad de familiaridad supuesta disminuye a medida que la crítica convierte el conocimiento básico en conocimiento. Cauchy, por ejemplo, ni siquiera se dio cuenta de que su famoso [1821] presuponía una «familiaridad» con la *teoría de números reales.* Hubiera rechazado por monstruoso cualquier contraejemplo que explicitase los lemas acerca de la naturaleza de los números irracionales. No así Weierstrass y su escuela: los textos de matemáticas informales contienen ahora un nuevo capítulo sobre la teoría de números reales en el que se recogen estos lemas. Pero, en sus introducciones, se supone normalmente «la familiaridad con la *teoría de números reales*». (Véase, por ejemplo, el *Pure Mathematics* de Hardy a partir de la segunda edición [1914] —la primera aún relegaba la teoría de números reales al conocimiento básico; o véase también Rudin [1953].) Los libros de texto más rigurosos restringen aún más el conocimiento básico. Landu, en la introducción a su famoso [1930], supone familiaridad tan sólo con *«el razonamiento lógico y la lengua alemana».* No deja de ser una ironía que, en la misma época, Tarski mostrase que los lemas absolutamente triviales así omitidos pueden ser no sólo falsos, sino también inconsistentes, siendo el alemán un lenguaje semánticamente cerrado. Uno se pregunta cuándo «el autor confiesa su ignorancia en el dominio *x*» sustituirá al eufemismo «el autor da por supuesto la familiaridad con el dominio *x*»: sin duda tan sólo cuando se reconozca que el conocimiento carece de fundamentos. <<

[73] Cuando se descubre por vez primera, el lema oculto se tiene por un error. Cuando J. C. Becker señaló por primera vez una suposición «oculta» *(stillschweigend)* en la prueba de Cauchy (citaba la prueba de segunda mano, tomándola de Baltzer [1862]), la consideró un «error» ([1869*a*], pág. 67-8). Llamó la atención sobre el hecho de que Cauchy pensaba que *todos* los poliedros eran simples: su lema no sólo era oculto, sino también falso. Con todo, a los historiadores no les cabe en la cabeza que los grandes matemáticos cometan semejantes errores. En Poincaré [1908], se puede hallar un programa acerca de cómo falsar la historia: «Una demostración que no sea rigurosa no es nada. No creo que nadie ponga en tela de juicio esta verdad. Mas, si se tomase muy al pie de la letra, deberíamos de concluir que antes de 1820, por ejemplo, no había matemáticas, lo que sería claramente excesivo; los geómetras de aquella época entendían voluntariamente lo que explicamos mediante un discurso prolijo. Eso no quiere decir que ellos no lo viesen en absoluto, sino que pasaban por encima de ello demasiado rápido, siendo así que verlo bien hubiese exigido tomarse la molestia de decirlo» (pág. 374). El informe de Becker sobre el «error» de Cauchy hubo de ser escrito de nuevo al modo de 1984: «doblemás no-bueno ref no-errores reescribir completamente». La reescritura la hizo K. Steinitz, quien insistió en que «el hecho de que el teorema no fuese generalmente válido no podía permanecer desapercibido» ([1914-31], pág. 20). El propio Poincaré aplicó su programa al teorema de Euler: «Se sabe que Euler probó que $V - A + C = 2$ para poliedros *convexos*» ([1893]). Naturalmente, Euler enunció su teorema para *todos* los poliedros. <<

[74] Véase la pág. 48. <<

[75] La nuestra es una clase más bien avanzada; Alfa, Beta y Gamma sospecharon de tres lemas cuando no había aparecido ningún contraejemplo global. En la historia real, el análisis de la prueba llegó varias décadas más tarde: durante un largo periodo, los contraejemplos o bien se ocultaron o se condenaron como monstruos o se incluyeron entre las excepciones. El paso heurístico de los contraejemplos globales al análisis de la prueba (la aplicación del Principio de la Retransmisión de la Falsedad) era virtualmente desconocido en las matemáticas informales de principios del diecinueve. <<

[76] H. G. Forder [1927], pág. viii. O: «Uno de los méritos principales de las pruebas consiste en insinuar cierto escepticismo acerca del resultado probado». (Russell [1903], pág. 360. Pone además un excelente ejemplo.) <<

[77] Es bien sabido que la *crítica* puede arrojar dudas e incluso refutar «verdades *a priori*», convirtiendo las *pruebas* en meras *explicaciones.* Esa *falta de crítica o refutación* puede convertir conjeturas implausibles en «verdades *a priori*» y, consiguientemente, explicaciones tentativas en pruebas, lo cual, aunque no sea tan conocido, no por ello es menos importante. Dos grandes ejemplos de este patrón vienen dados por el surgimiento y caída de Euclides y Newton. La historia de su caída es de sobra conocida, pero la de su surgimiento está usualmente deformada.

La geometría de Euclides parece haber sido propuesta como teoría cosmológica (cf. Popper [1952], págs. 187-9). Tanto sus «postulados» como sus «axiomas» (o «nociones comunes») se propusieron a modo de proposiciones audaces y provocativas que lanzaban un reto a Parménides y Zenón, cuyas doctrinas implicaban no sólo la falsedad, sino incluso la falsedad lógica, el carácter inconcebible, de esos «postulados». Sólo más tarde se consideraron indubitablemente verdaderos tales «postulados», y los audaces «axiomas» antiparmenideos (como «el todo es mayor que la parte») se consideraron tan triviales que se omitieron en el análisis de la prueba posterior, convirtiéndose en «lemas ocultos». Éste proceso se inició con Aristóteles: tildó a Zenón de extravagante pendenciero y a sus argumentos de «sofistería». Esta historia ha sido recientemente desarrollada con todo lujo de interesantes detalles por Árpád Szabó ([1960], págs. 65-84). Szabó ha mostrado que, en tiempos de Euclides, la palabra «axioma» (así como «postulado») significaba una proposición en el diálogo crítico (dialéctico), planteada para contrastar sus consecuencias *sin* que el compañero de discusión admitiese su verdad. Es una ironía de la historia que su significado resultase completamente invertido. La cúspide de la autoridad de Euclides se alcanzó en la Edad de la Ilustración. Clairaut insta a sus colegas a no «oscurecer las pruebas y cansar a los lectores» enunciando verdades evidentes: Euclides hacía tal cosa tan sólo para convencer a los «sofistas obstinados» ([1741], págs. x y xi).

Asimismo, *la mecánica y teoría de la gravitación de Newton* se propuso

como una conjetura osada que se vio ridiculizada y tildada de «oculta» por parte de Leibniz, y hasta el propio Newton abrigaba sus sospechas. Pero, unas décadas después, en ausencia de refutaciones, sus axiomas llegaron a considerarse indubitablemente verdaderos. Las sospechas se olvidaron y los críticos fueron motejados de «excéntricos» cuando no de «oscurantistas». Algunas de sus suposiciones más dudosas llegaron a considerarse tan triviales que los libros de texto ni siquiera llegaron a enunciarlas nunca. El debate, desde Kant a Poincaré, ya no versaba acerca de la verdad de la teoría newtoniana, sino acerca de la naturaleza de su certeza. (Este cambio radical en la apreciación de la teoría newtoniana lo señaló por primera vez Karl Popper; véase su [1963*a*], *passim*.)

La analogía entre ideologías políticas y teorías científicas es, por tanto, más estrecha de lo que normalmente se cree: las ideologías políticas que pueden comenzar discutiéndose (y quizá aceptándose tan sólo bajo presión), pueden convertirse en conocimiento básico incuestionable en una sola generación: los críticos se olvidan (quizá se ejecutan) hasta que una revolución vindica sus objeciones. <<

[78] Parece que el primero en expresar esta regla fue P. L. Seidel ([1847], pág. 383). Véase más abajo, pág. 159. <<

[79] «Tengo pleno derecho a proponer cualquier ejemplo que satisfaga las condiciones de su argumento y tengo fuertes sospechas de que lo que usted considera como ejemplos extraños y absurdos son de hecho ejemplos embarazosos y perjudiciales para su teorema» (G. Darboux [1874*b*]). <<

[80] «Me aterroriza el cúmulo de lemas implícitos. Exigirá un montón de trabajo desembarazarse de ellos» (G. Darboux [1883]). <<

[81] Véanse las páginas 47 y 53. <<

[82] Poincaré [1905], pág. 214. <<

[83] *Ibid.*, pág. 216. Los cambios en el criterio de «rigor de la prueba» han provocado grandes revoluciones en matemáticas. Los pitagóricos sostenían que las pruebas rigurosas debían ser aritméticas. Con todo, descubrieron una prueba rigurosa de que $\sqrt{2}$ era «irracional». Cuando este escándalo acabó por filtrarse, se cambió el criterio: la «intuición» aritmética se vio desacreditada, ocupando su lugar la geométrica. Ello significó una reorganización importante y complicada del conocimiento matemático (por ejemplo, la teoría de las proporciones). En el siglo dieciocho, algunas figuras «confundentes» contribuyeron a la mala reputación de las pruebas geométricas, con lo que el siglo diecinueve asistió de nuevo a la entronización de la intuición aritmética con ayuda de la engorrosa teoría de los números reales. Hoy día, la disputa principal versa acerca de qué es o no es riguroso en las pruebas de la teoría de conjuntos y en las de la metamatemática, como demuestran las conocidas discusiones sobre la admisibilidad de los experimentos mentales de Zermelo y Gentzen. <<

[84] Como ya hemos señalado, la clase es muy avanzada. <<

[85] El término «psicologismo» lo acuñó Husserl ([1900]). Para una «crítica» anterior del psicologismo, véase Frege [1893], págs. XV-XVI. Los intuicionistas modernos, al revés que Alfa, abrazan abiertamente el psicologismo: «Un teorema matemático expresa un hecho puramente empírico; a saber, el éxito de determinada construcción… la matemática… es el estudio de ciertas funciones de la mente humana» (Heyting [1956], págs. 8 y 10). Mantienen muy en secreto el modo en que reconcilian el psicologismo con la certeza. <<

[86] Entre los antiguos escépticos era un lugar común decir que, aunque tuviésemos un conocimiento perfecto, no podríamos articularlo perfectamente (véase Sexto Empírico [*c.* 190], I, 83-8), pero eso se olvidó en la Ilustración. Los intuicionistas lo redescubrieron: aceptaron la filosofía kantiana de las matemáticas, si bien señalaban que «no se puede ver una clara conexión entre la perfección de las matemáticas propiamente dichas y la perfección del lenguaje matemático» (Brouwer [1952], pág. 140). «La expresión mediante palabras habladas o escritas, aunque es necesaria para la comunicación, nunca resulta adecuada… La tarea de la ciencia no consiste en estudiar los lenguajes, sino en crear ideas» (Heyting [1939], págs. 74-5). <<

[87] Brouwer [1952], pág. 141. <<

[88] En castellano existe el término *«regreso infinito»,* si bien no es más que un caso *especial* de «infinitud viciosa» *(schlechte Unendlichkeit)* y no se habría de aplicar aquí. Obviamente, Alfa acuñó esta expresión pensando en *«círculo vicioso»*. <<

[89] Normalmente, los matemáticos evitan los teoremas largos mediante el expediente alternativo de las definiciones largas, de modo que en los teoremas sólo aparezcan los términos definidos (por ejemplo, «poliedro ordinario»); eso resulta más económico, ya que una definición abrevia muchos teoremas. Aun así, en las exposiciones «rigurosas», las definiciones ocupan un espacio enorme, aunque rara vez se mencionan los monstruos que han llevado a ellas. En Forder [1927] (págs. 67 y 29), la definición de *«poliedro euleriano»* (junto con la definición de algunos de los términos definitorios) ocupa unas 25 líneas; en la edición de 1962 de la *Encjclopaedia Britannica*, la definición de *«poliedro ordinario»* llena 45 líneas. <<

[90] «La lógica nos hace rechazar algunos argumentos, pero no puede hacernos creer ninguno» (Lebesgue [1928], pág. 328. *Nota de los editores:* Habría que señalar que la afirmación de Lebesgue es falsa si se toma al pie de la letra. La lógica moderna nos ha suministrado una caracterización precisa de la validez que, como se puede mostrar, satisfacen algunos argumentos. Así pues, es muy cierto que la lógica nos puede hacer creer un *argumento,* aun cuando no pueda hacernos creer en la *conclusión* de un argumento válido, ya que podemos no creer una o más de sus premisas. <<

[91] E. H. Moore [1902], pág. 411. <<

[92] «La naturaleza refuta a los escépticos, la razón, a los dogmáticos» (Pascal [1659], págs. 1206-7). Pocos matemáticos confesarían, como Beta, que la razón es demasiado débil como para justificarse a sí misma. La mayoría de ellos adoptan alguna variedad de dogmatismo, historicismo o pragmatismo confuso, permaneciendo curiosamente ciegos a su insostenibilidad; por ejemplo: «Las verdades matemáticas son de hecho *el prototipo de lo completamente incontestable*… Pero el rigor de las matemáticas no es absoluto; está en un proceso de desarrollo continuo; los *principios de las matemáticas no han cristalizado de una vez por todas,* sino que poseen una vida propia e incluso pueden convertirse en el tema de disputas científicas.» (A. D. Aleksandrov [1956], pág. 7.) (Esta cita puede recordarnos que la dialéctica trata de explicar el cambio sin utilizar la crítica: las verdades están «en continuo desarrollo», aunque siempre son «completamente incontestables».) <<

[93] *Nota de los Editores*. Creemos que esta nota histórica minimiza un poco los logros de los «rigoristas» matemáticos. La tendencia al «rigor» da a veces la impresión de que ha constituido un esfuerzo encaminado hacia dos metas distintas, de las cuales sólo una resulta alcanzable. Estas dos metas son, en primer lugar, los argumentos y pruebas rigurosamente correctos (donde la verdad se transmite infaliblemente de las premisas a las conclusiones) y, en segundo, axiomas o primeros principios rigurosamente verdaderos (que habrían de suministrar al sistema la primitiva inyección de verdad; verdad que se transmitiría entonces al conjunto de las matemáticas por vía de las pruebas rigurosas). El primero de estos objetivos resultó alcanzable (dadas, por supuesto, ciertas suposiciones), mientras que el segundo demostró ser inalcanzable.

Frege y Russel han suministrado sistemas a los que se podrían traducir las matemáticas (faliblemente; véase más abajo, la pág. 144) en los cuales los sistemas de reglas son finitos en número y se especifican por adelantado. Resulta que también se puede mostrar (y es aquí donde entran las suposiciones que se acaban de mencionar) que cualquier enunciado que se pueda demostrar empleando esas reglas constituye una consecuencia válida de los axiomas del sistema (es decir, que si esos axiomas son verdaderos, el enunciado probado *ha* de serlo también). En estos sistemas es preciso que no haya «saltos» en las pruebas, pudiéndose comprobar si una cadena de enunciados es o no una prueba en un número finito de pasos. (Por supuesto, si esta comprobación muestra que la secuencia de fórmulas no constituye una prueba, eso no establece que no exista en el sistema una prueba genuina de la fórmula final. Así pues, en la comprobación de las pruebas hay una asimetría que opera en favor de la verificación y en contra de la falsación.) No existe ningún sentido serio en el que tales pruebas sean falibles. (Bien es cierto que puede darse el caso de que todos los que hayan comprobado una de esas pruebas cometiesen algún error inexplicable, pero no se trata de una duda seria. Bien es cierto que el (meta-)teorema informal que dice que tales pruebas válidas transmiten la verdad puede ser falso; pero no hay razones

serias para pensar tal cosa.) Sin embargo, los *axiomas* de tales sistemas *son* falibles en un sentido no trivial. Como es bien sabido, el intento de derivar todas las matemáticas a partir de verdades «lógicas», «autoevidentes», se ha venido abajo. <<

[94] Más arriba, pág. 46. <<

[95] Para la discusión del primer caso, véase más arriba, págs. 26-29. <<

[96] Omega parece ignorar una tercera posibilidad: Gamma puede decir perfectamente que, puesto que los contraejemplos locales y no globales no muestran ninguna violación del principio de retransmisión de la falsedad, no hay que emprender ninguna acción. <<

[97] Cf. más arriba, pág. 65. <<

[98] Para la discusión de este segundo caso, cf. más arriba pág. 53. <<

[99] Véase más arriba, págs. 54-55. <<

[100] Más arriba, pág. 28. <<

[101] Ibid. <<

[102] La prueba de Gergonne se encuentra en Lhuilier [1812-13*a*], págs. 177-9. Como es natural, el original no podía contener aparatos fotográficos. Dice: «Tómese un poliedro una de cuyas caras sea transparente; imaginemos que acercamos el ojo a esta cara desde el exterior, hasta que esté lo suficientemente cerca como para poder ver el interior de todas las demás caras…» Gergonne señala modestamente que la prueba de Cauchy es más profunda, «posee la gran ventaja de que no supone en absoluto el carácter convexo». (Con todo, no se le ocurre preguntar qué es lo que supone.) Jacob Steiner redescubrió más tarde esencialmente la misma prueba ([1826]). Entonces le llamaron la atención sobre la prioridad de Gergonne, por lo que leyó el artículo de Lhuilier con la lista de excepciones, lo que no le impidió concluir su prueba con el «teorema»: *«Todos los poliedros son eulerianos»*. (El artículo de Steiner provocó que Hessel, el Lhuilier de los alemanes, escribiese su [1833].) <<

[103] *La prueba de Legendre* se puede encontrar en su [1803], aunque no así el *teorema* generado por la prueba, ya que el análisis de la prueba y la formación de teoremas eran virtualmente desconocidos en el siglo dieciocho. Legendre empieza definiendo los poliedros como sólidos cuya superficie consta de caras poligonales (pág. 161). Luego prueba $V - A + C = 2$ *en general* (pág. 228). Pero hay una corrección excluidora de excepciones en una nota en letra pequeña de la pág. 164, donde se dice que sólo se tendrán en cuenta los poliedros *convexos*. Ignoró los poliedros cuasi convexos. En su [1809], Poinsot fue el primero en darse cuenta, con ocasión de sus comentarios acerca de la prueba de Legendre, de que la fórmula de Euler «es válida no sólo para los sólidos convexos ordinarios, a saber, aquellos cuya superficie queda cortada por una línea en dos puntos a lo sumo, sino también para aquellos poliedros que tengan ángulos hacia adentro, con tal de que se pueda hallar en el interior del sólido un punto que sirva como centro de una esfera, sobre la cual se puedan proyectar las caras del poliedro mediante líneas provenientes del centro, de modo que las caras proyectadas no se solapen. Esto se aplica a una infinitud de poliedros con ángulos entrantes. De hecho, la prueba de Legendre, tal como está, se aplica a todos estos poliedros adicionales» (pág. 46). <<

[104] E. de Jonquières prosigue, tomando un argumento de Poinsot [1858]: «Al invocar a Legendre y grandes autoridades semejantes, lo único que se consigue es alimentar un prejuicio muy extendido que se ha adueñado incluso de los mejores intelectos: que el dominio de validez del teorema de Euler consta tan sólo de poliedros convexos» ([1890*a*], pág. 111). <<

[105] Esto es de Poinsot ([1858], pág. 70). <<

[106] D. M. Y. Sommerville ([1929], págs. 143-4). <<

[107] Este «gran dodecaedro estrellado» ya había sido concebido por Kepler ([1619], pág. 53). Poinsot lo descubrió independientemente más tarde ([1810]), siendo el primero en examinar su carácter euleriano. La figura 15 está sacada del libro de Kepler. <<

[108] Me ha sido imposible localizar esta cita. <<

[109] Cf. la nota [113]. <<

[110] Contraejemplos globales, pero no locales. <<

[111] Contraejemplos a la vez globales y locales. <<

[112] La respuesta está en la célebre heurística de Pappo en la antigüedad, que sólo se aplicaba al descubrimiento de verdades «últimas», «finales»; es decir, a teoremas que contuviesen condiciones tanto necesarias como suficientes. Para los «problemas de demostrar», la regla fundamental de esta heurística era: «Si se tiene una conjetura, derívense consecuencias de ella. Si se llega a una consecuencia que se sabe que es falsa, la conjetura era falsa. Si se llega a una consecuencia que se sabe que es verdadera, inviértase el orden y, si la conjetura se puede derivar así de esta consecuencia verdadera, entonces es que era verdadera». (Cf. Heath [1925], 1, págs. 138-9.) El principio *«causa aequat effectur»* y la búsqueda de teoremas con condiciones necesarias y suficientes se hallaban ambos en esta tradición. La búsqueda de la certeza prevaleció sobre la de la finalidad sólo en el siglo diecisiete, cuando fracasaron todos los esfuerzos por aplicar la heurística papiana a la ciencia moderna. <<

[113] **Nota de los editores:* El contenido de la nota de Epsilon se desvela más abajo, en el capítulo 2. <<

[114] Hay muchas pruebas de la conjetura de Euler. Para una discusión heurística detallada de las pruebas de Euler, Jordan y Poincaré, véase Lakatos [1961]. <<

[115] Poinsot, Lhuilier, Cauchy, Steiner, Crelle, todos ellos pensaban que las diferentes pruebas demostraban el mismo teorema: el *«teorema de Euler»*. Por citar una afirmación característica de un libro de texto normal: «El teorema surge con Euler, la primera prueba es de Legendre y la segunda, de Cauchy» (Crelle [1827], 2, pág. 671).

Poinsot estuvo muy cerca de percatarse de la diferencia al observar que la prueba de Legendre se aplicaba a otros poliedros además de a los convexos ordinarios. (Véase la nota [204].) Sin embargo, a la hora de comparar la prueba de Legendre con la de Euler (la que se basaba en cortar las esquinas piramidales del poliedro, llegando a un tetraedro final sin cambiar la característica de Euler), dio preferencia a la de Legendre por razón de la «simplicidad» [1858]. «Simplicidad» alude aquí a la idea de rigor del dieciocho: claridad en el experimento mental. No se le ocurrió comparar ambas pruebas desde el punto de vista del *contenido:* en tal caso, la prueba de Euler hubiese resultado superior. (De hecho, no hay nada malo en la prueba de Euler. Legender aplicó la norma subjetiva de rigor contemporáneo, descuidando la objetiva del contenido.)

Lhuilier, en una crítica solapada de este pasaje (no menciona a Poinsot), señala que la simplicidad de Legendre no es más que «aparente», ya que presume un considerable conocimiento básico en trigonometría esférica ([1812-13*a*], pág. 171). Pero, también Lhuilier cree que Legendre *«probó el mismo teorema»* que Euler (ibid. pág. 170).

Jacob Steiner le acompaña en la apreciación de la prueba de Legendre y en la suposición de que todas las pruebas demuestran el mismo teorema ([1826]). La única diferencia es que, mientras que según Steiner todas las pruebas diversas demuestran que *«todos los poliedros son eulerianos»*, para Lhuilier todas las pruebas distintas demuestran que *«todos los poliedros que no tienen túneles, cavidades y caras anulares son eulerianos»*.

Cauchy escribió su [1813*a*] sobre los poliedros cuando apenas contaba veinte años, mucho antes de su revolución del rigor, y no hay que tener muy en

cuenta que repita la comparación que Poinsot establece entre Euler y Legendre en la introducción de la segunda parte de su tratado. Como la mayoría de sus contemporáneos, no captó la diferencia de profundidad de las distintas pruebas, por lo que no podía apreciar el poder real de la propia. Pensaba que no había hecho más que dar *otra prueba más del mismo teorema*, si bien estaba muy interesado en señalar que había llegado a una generalización más bien trivial de la fórmula de Euler a ciertos agregados de poliedros.

Gergonne fue el primero en apreciar la profundidad sin igual de la prueba de Cauchy (Lhuilier [1812-13*a*], pág. 179). <<

[116] Véase la pág. 76. <<

[117] Véase más arriba, la pág. 76. <<

[118] Quienes se dieron cuenta del problema, independientemente, fueron Lhuilier [1812-13*a*] y Hessel [1832]. En el artículo de Hessel, las figuras de ambos marcos de cuadro aparecen juntas. Cf. también la nota [137]. <<

[119] Pólya lo denomina «la paradoja del inventor» ([1945], pág. 110). <<

[120] **Nota de los Editores:* La tabla se discutió antes de que entrásemos en el aula. <<

[121] Véase la nota [126]. Hemos tomado esta tabla de Pólya [1945], vol. 1, pág. 36. <<

[122] Véase más arriba, la pág. 22. <<

[123] Se trata de una importante cualificación de la nota [16]. <<

[124] Pólya [1945], vol. 1, págs. 5 y 7 *(el subrayado es mío).* <<

[125] Véase la pág. 87. <<

[126] Pólya reconstruye elegantemente estos ensayos y errores. La primera conjetura es que *C* aumenta con *V*. Al refutarla, siguen dos conjeturas más: *A* aumenta con *C; A* aumenta con *V*. La cuarta conjetura es la ganadora: *C* + *V* aumenta con *A* ([1945], vol. 1, págs. 35-7). <<

[127] Por otro lado, quienes, debido a la presentación deductiva usual de las matemáticas, se creen que el camino del descubrimiento procede de los axiomas y/o definiciones a las pruebas y teoremas, corren el riesgo de olvidar totalmente la posibilidad e importancia del conjeturar ingenuo. De hecho, en la heurística matemática, el peligro mayor está en el deductivismo, mientras que en la heurística científica está en el inductivismo. <<

[128] El resurgimiento en este siglo de la heurística matemática se debe a Pólya. Uno de los aspectos fundamentales de su admirable obra es el hincapié que hace en las semejanzas entre la heurística científica y matemática. Lo único que se puede considerar como una debilidad está relacionado con su fuerza: nunca cuestiona que la ciencia sea inductiva y, debido a su visión correcta de la profunda analogía entre la heurística científica y la matemática, se ha visto llevado a pensar que también las matemáticas son inductivas. Lo mismo le pasó anteriormente a Poincaré (véase su [1902], la Introducción), así como a Fréchet (véase su [1938]). <<

[129] Véase más arriba, pág. 58. <<

[130] Según la heurística de Pappo, el descubrimiento matemático comienza con una conjetura que se continúa con un *análisis* y luego, en el caso de que el *análisis* no false la conjetura, con una *síntesis.* (Cf. también más arriba, nota [16], y nota [112]). Pero, mientras que nuestra versión del *análisis-síntesis mejora* la conjetura, la versión pappiaera tan sólo la *prueba* o la *refuta.* <<

[131] Cf. Robinson [1936], pág. 471. <<

[132] Véase más arriba, la pág. 11. <<

[133] *Nota de los Editores:* Esta inferencia es falaz, aun cuando la conclusión sea correcta. De hecho, el encolado entraña la pérdida de 8 vértices, 12 aristas y 6 caras. Por tanto, la característica de Euler *se reduce* en dos. (La supuesta coincidencia exacta de las dos caras sombreadas de la fig. 20(*b*) entraña invertir el bisel de uno de los semi-marcos, de modo que se intercambien la arista más ancha y la más estrecha. Puesto que esta operación no altera ni *V* ni *A* o *C*, de hecho el argumento sigue valiendo.) <<

[134] Esto lo hizo Raschig [1891]. <<

[135] Hoppe [1879], pág. 102. <<

[136] Una vez más, se trata de algo que forma parte de la heurística pappiana. Denomina *«teórico»* al *análisis* que parte de una conjetura y *«problemático»* al que no parte de ninguna conjetura (Heath, [1925], vol. 1, pág. 138). El primero se refiere a *problemas de probar* y el segundo, a *problemas de resolver* (o *problemas de hallar*). Cf. también Pólya [1945], págs. 129-36 («Pappo») y 197-204 («Trabajando hacia atrás»). <<

[137] Lhuilier restauró el «orden», sirviéndose aproximadamente de la misma fórmula ([1812-13*a*], pág. 189); también lo restauró Hessel con fórmulas engorrosas y *ad hoc* sobre diferentes maneras de encajar poliedros eulerianos ([1832], págs. 19-20). Cf. la nota [118].

Históricamente, Lhuilier en su [1812-13*a*] se las arregló para generalizar la fórmula de Euler mediante conjeturar ingenuo, llegando a la siguiente fórmula: $V - A + C = 2[(C - T + 1) + (p_1 + p_2 + \ldots)]$, donde C es el número de cavidades, T el número de túneles y p_i el número de polígonos internos de la i-ava cara. También lo *probó* por lo que respecta a los «polígonos internos», aunque los túneles parecen haberle derrotado. Construyó la fórmula en un intento de dar cuenta de los tres tipos de «excepciones», pero su lista de excepciones era incompleta. (Cf. más arriba, la nota [39].) Además, esta incompletitud no era la única razón de la falsedad de su conjetura ingenua, puesto que no se dio cuenta de la posibilidad de que las cavidades fuesen múltiplemente conexas; de que puede que no sea posible determinar sin ambigüedad el número de túneles en poliedros con un sistema de túneles ramificados; y de que no es el «número de polígonos internos», sino el número de caras anulares, el que resulta relevante (su fórmula fracasa para dos polígonos internos adyacentes con una arista común). Para una crítica de la «generalización inductiva» de Lhuilier, véase Listing [1861], págs. 98-9. Cf. también la nota [161]. <<

[138] Unos pocos matemáticos del siglo diecinueve se sintieron confundidos con semejantes aumentos triviales de contenido y no sabían realmente cómo abordarlos. Algunos, como Möbius, utilizaron definiciones excluidoras de monstruos (véase más arriba, pág. 32; otros, como Hoppe, ajuste de monstruos. El Hoppe [1879] es particularmente revelador. Por otro lado, estaba ansioso, como muchos de sus contemporáneos, por tener una «fórmula generalizada de Euler» *perfectamente completa,* que lo cubriese todo. Además, huía de complejidades triviales. Así, a la vez que pretendía que su fórmula era «completa y omnicomprensiva», añadía confusamente que «casos especiales pueden hacer dudosa la enumeración (de constituyentes)» (pág. 103). Es decir, si un poliedro incómodo seguía derrotando su fórmula, entonces sus constituyentes estaban mal contados y el monstruo habría de ser ajustado corrigiendo la visión; por ejemplo, las aristas y vértices comunes de los tetraedros gemelos deberían verse y contarse dos veces y cada gemelo debería reconocerse como un poliedro separado (ibid.) Para otros ejemplos, cf. la nota [168]. <<

[139] Véase más arriba, las págs. 68-71. <<

[140] Cf. las págs. 117-118. <<

[141] Los filósofos antiguos no dudaban en deducir una conjetura a partir de una consecuencia suya muy trivial (véase, por ejemplo, nuestra prueba sintética que lleva del triángulo al poliedro). Platón pensaba que «un solo axioma podría bastar para generar todo un sistema». «Normalmente consideraba que una sola hipótesis era fértil por sí misma, ignorando en su metodología las otras premisas con las que la conecta» (Robinson [1935], pág. 168). *Se trata de algo característico de la lógica informal antigua, es decir, de la lógica de la prueba, el experimento mental o de la construcción; la consideramos entimemática debido tan sólo a la retrospección: sólo más tarde el aumento de contenido se convirtió en un símbolo no de la potencia, sino de la debilidad de una inferencia.* Esta lógica informal antigua era enérgicamente defendida por Descartes, Kant y Poincaré; todos ellos despreciaban la lógica formal aristotélica, eliminándola por estéril e irrelevante (alabando al mismo tiempo la infalibilidad de la fértil lógica informal). <<

[142] Poincaré [1902], pág. 33. <<

[143] La caza de lemas ocultos, que no comenzó sino en la crítica matemática a mediados del diecinueve, estaba íntimamente relacionada con el proceso que más tarde sustituiría las *pruebas* por *análisis de pruebas* y las *leyes del pensamiento* por *leyes del lenguaje.* Los desarrollos más importantes en teoría lógica fueron precedidos normalmente por el desarrollo de la crítica matemática. Desgraciadamente, aun los mejores historiadores de la lógica tienden a prestar atención exclusivamente a los *cambios en la teoría lógica*, sin percatarse de sus raíces en los *cambios en la práctica lógica.* Cf. también la nota [182]. <<

[144] Véase la pág. 95. <<

[145] Véase la pág. 76. <<

[146] Véase la pág. 68. <<

[147] No cabe duda de que Alfa parece haberse deslizado en la falacia de la heurística deductiva. Cf. nota [127]. <<

[148] Descartes [1628], Regla III. <<

[149] Véase la pág. 58-59. <<

[150] La Fig. 6 de Euler [1758*a*] es el primer poliedro cóncavo que haya aparecido nunca en un texto geométrico. Legendre habla de poliedros convexos y cóncavos en su [1809]. Pero, antes de Lhuilier, nadie mencionó poliedros cóncavos que no fuesen simples.

Con todo, habría que añadir una cualificación interesante. La primera clase de poliedros que se haya investigado nunca constaba en parte de los cinco poliedros regulares ordinarios y de poliedros cuasi-regulares, como prismas y pirámides (cf. Euclides). A partir del Renacimiento, dicha clase se extendió en dos direcciones. Una es la que se indica en el texto y que incluye todos los poliedros convexos y algunos simples ligeramente indentados. La otra es la de Kepler, quien aumentó la clase de los poliedros regulares con su invención de los poliedros estrellados regulares. Mas, la invención de Kepler se olvidó hasta que la halló de nuevo Poinsot (cf. más arriba, págs. 33-34). No cabe duda de que Euler ni siquiera soñó con los poliedros estrellados. Cauchy tenía noticia de ellos, pero su mente estaba extrañamente dividida en compartimientos: cuando se le ocurrió una buena idea sobre poliedros estrellados, la publicó, pero ignoró los poliedros estrellados a la hora de presentar contraejemplos de sus teoremas generales acerca de poliedros. No así el joven Poinsot ([1810]), si bien más adelante cambió de idea (cf. más arriba, la nota [48]).

Así pues, la afirmación de Pi, aunque heurísticamente correcta (es decir, es verdadera en una historia racional de las matemáticas), resulta históricamente falsa. (No deberíamos preocuparnos por ello: la historia real es frecuentemente una caricatura de sus reconstrucciones racionales.) <<

[151] Un ejemplo interesante de definición incluidora de monstruos viene dado por la definición de Poinsot de *convexidad*, que incluye los poliedros estrellados en la clase respetable de los cuerpos convexos regulares [1810]. <<

[152] Ese es de hecho el caso de Cauchy. Es muy posible que si Cauchy hubiese descubierto ya su método revolucionario de exclusión de excepciones (cf. más arriba, págs. 73-74), hubiera buscado y hallado algunas excepciones. Pero probablemente no llegó hasta más adelante al problema de las excepciones, una vez que hubo decidido limpiar el análisis del caos. (Parece haber sido Lhuilier el primero en constatar y encarar el hecho de que tal «caos» no estaba confinado al análisis.)

Los historiadores, como Steinitz en su [1914-31], afirman usualmente que, al notar Cauchy que su teorema no era universalmente válido, lo enunció tan sólo para poliedros *convexos*. Es cierto que en su prueba utiliza la expresión «la superficie convexa de un poliedro» ([1813*a*], pág. 81), y que en su [1813*b*] enuncia de nuevo el teorema de Euler bajo el encabezamiento general: «Teoremas sobre ángulos sólidos y *poliedros convexos*». Pero, probablemente para contrarrestar su título, pone un particular acento en la validez *universal* del teorema de Euler para *cualquier* poliedro (Teorema XI, pág. 94), mientras que enuncia otros tres teoremas (Teorema XIII y sus dos corolarios) explícitamente para poliedros *convexos* (págs. 96 y 98).

¿A qué se debe la terminología descuidada de Cauchy? La idea de poliedro de Cauchy coincidía *casi* con el concepto de poliedro convexo; pero no coincidía exactamente. Cauchy conocía los poliedros cóncavos que se pueden obtener hundiendo ligeramente el lado de los convexos, pero no discute lo que parecen ser *corroboraciones* (y no *refutaciones*) adicionales y triviales de su teorema. *(Las corroboraciones no tienen punto de comparación con los contraejemplos o incluso las «excepciones» en cuanto catalizadoras del desarrollo conceptual.)* Esta es la razón del uso casual que hace Cauchy de «convexo»: se trata de un fallo a la hora de constatar que los poliedros cóncavos podrían suministrar contraejemplos, y no un esfuerzo consciente por *eliminar* dichos contraejemplos. En el mismísimo párrafo dice que el teorema de Euler es una «consecuencia inmediata» del lema de que $V - A + C = 1$ para los entramados *planos* poligonales y afirma que «para la validez del teorema $V - A + C = 1$ no tiene ninguna importancia que los polígonos estén

en el mismo o en diferentes planos, ya que el teorema se ocupa sólo del número de polígonos y del número de sus constituyentes» (pág. 81). Este argumento es perfectamente correcto dentro del estrecho marco conceptual de Cauchy, aunque incorrecto en otro más amplio en el que «poliedro» se refiera también a, por ejemplo, marcos de cuadro. El argumento se repitió frecuentemente en la primera mitad del diecinueve (por ejemplo, Olivier [1826], pág. 230 o Grunert [1827], pág. 367, o bien R. Baltzer [1860-62], vol. 2, pág. 207). Fue criticado por J. C. Becker ([1869*a*], pág. 68).

A menudo, tan pronto como la extensión de conceptos refuta una proposición, la proposición refutada parece un error tan elemental que uno no se imagina cómo pueden haberla cometido esos grandes matemáticos. Esta importante característica de la refutación por extensión de conceptos explica por qué historiadores respetables se crean un laberinto de problemas, debido a que no entienden que los conceptos *se desarrollan.* Tras salvar a Cauchy pretendiendo que «no podrían escapársele» poliedros que no son simples y que, por tanto, *restringió «categóricamente»* (!) el teorema al dominio de los poliedros convexos, el historiador respetuoso ha de explicar entonces por qué la línea fronteriza de Cauchy resultaba «innecesariamente» estrecha. ¿Por qué *ignoró* los poliedros eulerianos no convexos? He aquí la explicación de Steinitz: la formulación *correcta* de la fórmula de Euler está en términos de la conexión de superficies. Puesto que en tiempos de Cauchy este concepto no había sido aún «captado claramente», «la salida más simple» consistía en suponer la convexidad (pág. 20). Así, Steinitz aclara un error que Cauchy nunca cometió.

Otros historiadores proceden de otro modo. Afirman que antes de que se alcanzase el punto en que se formula el marco conceptual correcto (es decir, el que ellos conocen), existía sólo una «edad tenebrosa» con resultados «que rara vez resultaban adecuados, si es que alguna vez lo eran». Según Lebesgue ([1923], págs. 59-60), ese punto de la teoría de los poliedros está en la prueba de Jordan [1866*a*]; según Bell ([1945], pág. 460), está en la de Poincaré [1895]. <<

[153] Véase más arriba, pág. 75. <<

[154] Cf. nota [53]. <<

[155] En su [1874*a*], Darboux se aproximó mucho a esta idea. Más tarde, Poincaré la formuló claramente: «… las matemáticas son el arte de dar el mismo nombre a cosas distintas… Cuando el lenguaje está bien elegido, nos asombra saber que todas las pruebas hechas para determinado objeto se aplican inmediatamente a muchos objetos nuevos; nada hay que cambiar, ni siquiera las palabras, puesto que los nombres se han hecho los mismos» ([1908], pág. 375). Fréchet lo llama «un principio de generalización extremadamente útil» y lo formula como sigue: «Cuando el conjunto de propiedades de una entidad matemática utilizado en la prueba de una proposición acerca de dicha entidad no determina esta entidad, se puede extender la proposición para que se aplique a una entidad más general» ([1928], pág. 18). Señala que tales generalizaciones no son triviales y «pueden exigir inmensos esfuerzos» (ibid.). <<

[156] Cauchy no se dio cuenta de esto. Su prueba difiere de la dada por el Maestro en un aspecto importante: en su [1813*a*] y [1813*b*], Cauchy *no* imaginaba que el poliedro fuese de caucho. La novedad de esta idea de prueba era imaginar el poliedro como una *superficie* y no como un *sólido*, como hacían Euclides, Euler y Legendre. Pero lo imaginaba como una superficie *sólida*. Cuando eliminaba una cara y proyectaba el entramado poligonal espacial restante como un entramado plano, no concebía esta proyección como un *estirado* capaz de *doblar* las caras o aristas. El primer matemático que se dio cuenta de que la prueba de Cauchy se podría realizar en poliedros con *caras curvadas* fue Crelle ([1826-7], págs. 671-2), aunque seguía cuidadosamente apegado a las *aristas rectas*. Con todo, Cayley reconoció «*a primera vista*» que «la teoría no quedaría substancialmente alterada permitiendo que las aristas fuesen líneas curvas» ([1861], pág. 425). La misma consideración la hicieron independientemente Listing en Alemania ([1861], pág. 99) y Jordan en Francia ([1866*a*], pág. 39). <<

[157] *Esta teoría de la formación de conceptos liga la formación de conceptos a las pruebas y refutaciones;* Pólya la liga a las *observaciones:* «Cuando los físicos comenzaron a hablar de la “electricidad” o los médicos del “contagio”, esos términos eran vagos, oscuros y escurridizos. Los términos que los científicos usan hoy día, tales como “carga eléctrica”, “corriente eléctrica”, “infección por hongos” o “infección virótica”, resultan incomparablemente más claros y definidos. Sin embargo, qué cantidad tan tremenda de observaciones, cuántos experimentos ingeniosos, así como también algunos grandes descubrimientos, se interponen entre ambas terminologías. La inducción ha cambiado la terminología y ha clarificado los conceptos. También podemos ejemplificar este aspecto del proceso, la clarificación inductiva de los conceptos, mediante convenientes ejemplos matemáticos». ([1945], vol. 1, pág. 55.) Pero, aun esta equivocada teoría inductivista de la formación de conceptos resulta preferible al intento de convertir en *autónoma* la formación de conceptos, de convertir la *«clarificación»* o *«explicación»* de conceptos en algo *preliminar* a cualquier discusión científica. <<

[158] Véase más arriba, pág. 85. <<

[159] Hobbes [1656], Animadversions upon the Bishop's Reply N.° xxi. <<

[160] Véase más arriba, pág. 83, nota [113]. <<

[161] Resulta interesante seguir los cambios graduales desde la clasificación más bien ingenua de los poliedros hasta la elevadamente teórica. La primera clasificación ingenua que engloba no sólo poliedros simples proviene de Lhuilier: se trata de una clasificación según el número de *cavidades, túneles* y *«polígonos internos»* (véase la nota [137]).

(a) Cavidades. La primera prueba de Euler y, dicho sea de paso, la del propio Lhuilier ([1812-13*a*], págs. 174-7), descansaba en la descomposición del *sólido*, sea cortando sus esquinas una a una, o descomponiéndolo en pirámides a partir de uno o más puntos de su interior. Con todo, la idea de prueba de Cauchy, de la que Lhuilier no tenía idea, descansaba en la descomposición de la *superficie* poliédrica. Cuando la teoría de las superficies poliédricas terminó por sustituir a la teoría de los sólidos poliédricos, las cavidades se hicieron interesantes: *un* «poliedro con cavidades» se convierte en toda una *clase* de poliedros. De este modo, nuestra vieja *Definición 2,* excluidora de monstruos (pág. 31) se convirtió en una definición teórica generada por la prueba y el concepto taxonómico de «cavidad» desapareció de la corriente principal del desarrollo.

(b) Túneles. Ya Listing señalaba el carácter insatisfactorio de este concepto (véase la nota [137]). La sustitución no procedió de ninguna «explicación» del concepto «vago» de túnel, como se sentiría inclinado a esperar un carnapiano, sino del intento de probar o refutar la conjetura ingenua de Lhuilier acerca de la característica de Euler de los poliedros con túneles. En el transcurso de este proceso, el concepto de poliedro con *n* túneles desapareció, tomando su lugar el generado por la prueba de «múltiple-conexión» (lo que hemos denominado «carácter *n*-esferoide»). Vemos que en algunos artículos se mantiene el termino ingenuo, en lugar de utilizar el nuevo, generado por la prueba: Hoppe define el número de «túneles» mediante el número de cortes que dejan al poliedro conexo ([1879], pág. 102). Para Ernst Steinitz, el concepto de túnel está tan impregnado de teoría que le resulta imposible hallar una diferencia «esencial» entre la clasificación ingenua de Lhuilier, según el número de túneles, y la clasificación generada

por la prueba, según el carácter múltiplemente conexo; por consiguiente, considera la crítica que Listing hace de la clasificación de Lhuilier como algo «en gran medida injustificado» ([1914-31], pág. 22).

(c) «Polígonos internos». Este concepto ingenuo se vio pronto sustituido, primero, por caras anulares y, luego, por caras múltiplemente conexas (cf. también la nota [137]). (Digo *sustituido* y no «explicado», ya que no cabe duda de que «cara anular» no es una explicación de «polígono interno».) Sin embargo, cuando la teoría de las superficies poliédricas fue superada, por un lado, por la teoría topológica de las superficies y, por el otro, por la teoría de grafos, perdió todo interés el problema de cómo las caras múltiplemente conexas influyen sobre la característica de Euler de un poliedro.

Así, de los tres conceptos de la primera clasificación ingenua, sólo «quedó» uno, y éste, incluso en una forma difícilmente reconocible; la fórmula de Euler generalizada quedó por el momento reducida a $V - A + C = 2 - 2n$. (Para ulteriores desarrollos, véase la nota [156].) <<

[162] Por lo que respecta a la clasificación ingenua, los nominalistas están cerca de la verdad cuando pretenden que lo único que los poliedros tienen en común es el nombre. Mas, a medida que pasan unos cuantos siglos de pruebas y refutaciones y se desarrolla la teoría de los poliedros, con la clasificación teórica sustituyendo a la ingenua, la balanza se inclina en favor del realista. Habría que reconsiderar el problema de los universales ante el hecho de que el lenguaje cambia a medida que se desarrolla el conocimiento.
<<

[163] Félix [1957], pág. 10. Según los positivistas lógicos, la tarea *exclusiva* de la filosofía es construir lenguajes «formalizados» en los que se expresan estadios artificialmente cristalizados de la ciencia (véase nuestra cita de Carnap, más arriba, en la pág. 17). Mas tales investigaciones difícilmente se ponen en marcha antes de que el rápido desarrollo científico descarte el viejo «sistema lingüístico». La ciencia nos enseña a no respetar ningún marco lingüístico dado, no sea que se convierta en una prisión conceptual. Los analistas del lenguaje tienen un firme interés en mostrar al menos este proceso, a fin de justificar su terapéutica lingüística; es decir, en mostrar que poseen una importantísima interacción con la ciencia y que no degeneran en «oscuridades triviales bastante secas» (Einstein [1953]). Popper ha hecho críticas semejantes del positivismo lógico: véase por ejemplo su [1959], pág. 128, nota *3. <<

[164] Pólya discrimina entre las contrastaciones «simples» y las «severas». Las contrastaciones «severas» pueden suministrar «la primera intuición de una prueba» ([1954*b*], vol. 1, págs. 34-40). <<

[165] En lógica *informal* nada hay de malo en «el hecho tan corriente en matemáticas, aunque tan sorprendente para el principiante o para el filósofo que se tiene por avanzado, de que el caso general pueda ser lógicamente equivalente al especial» (Pólya [1954*b*], vol. 1, pág. 17). Cf. también Poincaré [1902], págs. 31-3. <<

[166] Cayley [1861] y Listing [1861] se tomaban en serio la extensión de los conceptos básicos de la teoría de poliedros. Cayley definía *arista* como «el camino de una cúspide a sí misma o a cualquier otra», aunque permitía que las aristas degenerasen en curvas cerradas sin vértices, que denominaba «contornos» (pág. 426). Listing poseía un término para las aristas con un vértice, dos o ninguno: «*líneas*» (pág. 104). Ambos se daban cuenta de la necesidad de una teoría completamente nueva para explicar las «extravagancias» que introducían con su marco conceptual liberal: Cayley inventó la «*Teoría de Particiones de un Cerrado*» y Listing, uno de los grandes pioneros de la topología moderna, el «*Censo de Complejos Espaciales*». <<

[167] Véase más arriba, págs. 48-50 y 56-57. <<

[168] Bastantes matemáticos son incapaces de distinguir lo trivial de lo que no lo es. Ello resulta especialmente molesto cuando la falta de sensibilidad para lo relevante se une a la ilusión de que uno puede construir una fórmula *perfectamente completa* que cubra todos los casos concebibles (cf. la nota [138]). Tales matemáticos pueden pasarse años y años trabajando en la generalización «última» de una fórmula, para terminar extendiéndola con unas pocas correcciones triviales. El excelente matemático J. C. Becker suministra un divertido ejemplo: tras muchos años de trabajo, produjo la fórmula, $V - A + C = 4 - 2n + q$, donde n es el número de cortes necesarios para dividir la superficie poliédrica en superficies simplemente conexas, para las que $V - A + C = 1$, y q es el número de diagonales que hay que añadir para reducir todas las caras a simplemente conexas ([1869*a*], pág. 72). Estaba muy orgulloso de su logro que, según pretendía, arrojaba «una luz completamente nueva» e incluso «llevaba a término» «un tema en el que se interesaron antes que él, personas como Descartes, Euler, Cauchy, Gergonne, Legendre, Grunert y von Staudt» (pág. 65). Pero faltaban tres nombres en la lista: Lhuilier, Jordan y Listing. Cuando le hablaron acerca de Lhuilier, publicó una triste nota admitiendo que Lhuilier sabía ya todo eso más de cincuenta años antes. Por lo que respecta a Jordan, no estaba interesado en caras anulares, aunque llegó a interesarse por los poliedros abiertos con fronteras, de modo que en su fórmula m, el número de fronteras, aparece además de n ([1866*b*], pág. 86). Así, en un nuevo artículo [1869*b*], Becker combinó las fórmulas de Lhuilier y Jordan para producir $V - A + C = 4 - 2n + q + m$ (pág. 343). Mas, en su embarazo, se precipitó demasiado, sin haber asimilado el largo artículo de Listing. Así pues, concluyó tristemente su [1869*b*] con la declaración de que «la generalización de Listing es aún mayor». (Por cierto, más tarde trató de extender su fórmula también a los poliedros estrellados [1874]; cf. más arriba, nota [48].) <<

[169] Algunas personas pueden entretener ideas filisteas acerca de *una ley de rendimientos decrecientes en las refutaciones*, cosa que no hace Gamma, sin duda alguna. No discutiremos ahora los poliedros *uni-laterales* (Möbius, [1865]) o los poliedros *n-dimensionales* (Schläfli, [1852]), que confirmarían la expectativa de Gamma de que las refutaciones extensoras de conceptos totalmente inesperadas pueden siempre dar a toda la teoría un empujón nuevo (y tal vez revolucionario). <<

[170] Pólya señala que la generalización superficial y pobre «está hoy día más de moda que antes. Diluye una pequeña idea en una terminología altisonante. Normalmente, el autor prefiere incluso tomar de otro esa pequeña idea, se abstiene de añadir cualquier observación original y de resolver ningún problema que no sean los pocos problemas surgidos de las dificultades de su propia terminología. Sería muy fácil citar algunos ejemplos, pero no quiero enfrentarme con la gente» ([1954*b*], vol. 1, pág. 30). Otro de los grandes matemáticos de nuestro siglo, John von Neumann, también advierte contra este «peligro de degeneración», aunque no sería tan malo «si la disciplina sufriese la influencia de personas de gusto excepcionalmente desarrollado» ([1947], pág. 196). Uno se pregunta, sin embargo, si la «influencia de personas de gusto excepcionalmente desarrollado» bastará para salvar las matemáticas en nuestra época de «o publicas o pereces». <<

[171] Véase más arriba, la pág. 71. <<

[172] Véase más arriba, ibid. <<

[173] De hecho, Alfa no utilizó explícitamente este término popperiano; véase más arriba, la pág. 38. <<

[174] Véase más arriba, § 4, (*b*). <<

[175] Véase más arriba § 5. <<

[176] Véase más arriba, págs. 60-64. <<

[177] **Nota de los Editores:* La afirmación de Kapa, en el sentido de que la vaguedad es inevitable, es correcta (*algunos* términos han de ser primitivos). Pero es un error pensar que eso significa que sólo se pueden producir contraejemplos por «extensión de conceptos». Por definición, una prueba válida es aquella para la que nunca se puede suministrar un contraejemplo, *interprétense como se interpreten los términos descriptivos;* es decir, su validez no depende del significado de los términos descriptivos, los cuales se pueden extender como se quiere. Es algo que señala el propio Lakatos más abajo, en la pág. 124 y (con mayor claridad) en el capítulo 2, págs. 146-147. <<

[178] Cf. Félix [1957], pág. 9. <<

[179] La exigencia de Gamma de una definición cristalina de «contraejemplo» equivale a pedir que el metalenguaje posea conceptos cristalinos e inelásticos como una de las condiciones de la discusión racional. <<

[180] Arnauld y Nicole [1724], págs. xx-xxi. <<

[181] Se trata de una versión ligeramente parafraseada de la definición de Bolzano de verdad lógica ([1837], § 147). Resulta sorprendente por qué propuso Bolzano su definición en los años 1830, especialmente teniendo en cuenta que su obra anticipa el concepto de modelo, una de las mayores innovaciones de la filosofía de las matemáticas del diecinueve. <<

[182] La crítica matemática del diecinueve extendió más y más los conceptos y desplazó la carga significativa de más y más términos hacia la *forma lógica* de las proposiciones y hacia el significado de unos pocos términos (aún) no extendidos. En los años treinta, este proceso pareció remitir y la línea de demarcación entre términos inextensibles («lógicos») y extensibles («descriptivos») pareció estabilizarse. Se llegó a un consenso acerca de una lista de un pequeño número de términos lógicos, de modo que fue posible dar una definición general de verdad lógica; ésta ya no hacía «referencia a» una lista *ad hoc* de constituyentes. (Cf. Tarski [1935].) Con todo, Tarski estaba perplejo con esta demarcación y se preguntaba si, después de todo, no tendría que volver a un concepto relativizado de contraejemplo y, consiguientemente, de verdad lógica (pág. 420) —como el de Bolzano del que, dicho sea de paso, Tarski no sabía nada. El resultado más interesante en esta dirección es el artículo de Popper [1947-8], del que se sigue que no se pueden eliminar más constantes lógicas sin eliminar algunos principios básicos de la discusión racional. <<

[183] La expresión de Bartley es «retirada al compromiso» [1962]. Investiga el problema de si una defensa racional del racionalismo crítico es posible, fundamentalmente con respecto al conocimiento *religioso;* pero los patrones del problema son los mismos por lo que respecta al conocimiento *matemático.* <<

[184] Véase más arriba, págs. 60-64. De hecho, lo que Gamma quería era eliminar parte de la carga de significado de «todos», de manera que ya no se aplicase exclusivamente a clases no vacías. La modesta extensión de «todos», eliminando el «alcance existencial» de su significado y convirtiendo así el conjunto vacío de un monstruo en un conjunto *burgués* ordinario, constituyó un suceso importante, relacionado no sólo con la reinterpretación teórico-conjuntista que hace Boole de la lógica aristotélica, sino también con el surgimiento del concepto de satisfacción vacía en la discusión matemática. <<

[185] Los conceptos de crítica, contraejemplo, consecuencia, verdad y prueba son inseparables; cuando cambian, *el primer cambio se produce en el concepto de crítica*, siguiéndose cambios en los demás. <<

[186] Cf. Lakatos [1962]. <<

[187] Popper [1963*b*], pág. 968. <<

[188] Véanse las págs. 83 y 110. <<

[189] Véase más arriba, pág. 54. <<

[190] Probablemente sea Epsilon el primer seguidor de Euclides que haya apreciado el valor heurístico del procedimiento de prueba. Hasta el siglo diecisiete, los partidarios de Euclides aceptaban el método platónico de análisis como método heurístico. Más adelante, lo sustituyeron por el golpe de suerte y/o de genio. <<

[191] En el análisis de la prueba no se impone ninguna limitación sobre «herramientas». Podemos utilizar cualquier lema, cualquier concepto. Esto es cierto en cualquier teoría informal, en desarrollo, donde la resolución de problemas es una cuestión de lucha libre. En una teoría formalizada, las herramientas están completamente prescritas en la sintaxis de la teoría. En el caso ideal (donde hay un procedimiento de decisión) la resolución de problemas es un ritual. <<

[192] Se trata de las palabras de Descartes en su [1628], Regla XIII. <<

[193] No habría que olvidar que mientras que el análisis de la prueba *concluye* con un teorema, la prueba euclídea *comienza* con él. En la metodología euclídea no hay conjeturas; sólo teoremas. <<

[194] Descartes [1628], Regla IX. <<

[195] Reglas para las definiciones de Pascal ([1659], págs. 596-7): «No definir ningún término que sea perfectamente conocido. No permitir que no sea definido ningún término mínimamente oscuro o equívoco. Emplear en la definición de los términos tan sólo palabras perfectamente conocidas o ya explicadas». <<

[196] Descartes [1628], notas a la Regla III. <<

[197] Ibid. <<

[198] Pólya [1945], págs. 81-2. <<

[199] «Definición como enunciado indemostrable de naturaleza esencial» (Aristóteles, *Analytica Posteriora,* 94*a*). <<

[200] Gergonne [1818]. <<

[201] Schläfli [1852] descubrió que estos términos se pueden subsumir bajo un único término abstracto general. Los denominó «poliesquemas». Listing [1861] los denomina «curianos»; pero fue Schläfli quien extendió la generalización a más de tres dimensiones. <<

[202] «A las conclusiones de la razón humana tal como se aplican ordinariamente a cuestiones naturales las denomino, en aras de la distinción, *Anticipaciones de la Naturaleza* (como algo burdo y prematuro). A lo que la razón extrae de los hechos por un proceso justo y metódico lo denomino *Interpretaciones de la Naturaleza*» (Bacon [1620], XXVI). <<

[203] La Figura 27 está dibujada a partir de Hilbert y Cohn-Vossen [1932]. <<

[204] Descubierto por C. Reinhardt (véase su [1885], pág. 114). <<

[205] W. Dyck fue el primero en darse cuenta de que la unilateralidad o la bilateralidad depende del número de dimensiones del espacio. Véase su [1888], pág. 474. <<

[206] *Nota de los Editores:* «Pensar a voces» era un término técnico del inglés de Lakatos. [Lakatos decía «pensar a voces» o, más bien, «pensar ruidosamente» *(thinking loudly)* en lugar de «pensar en voz alta» *(thinking aloud).* N. del T.] <<

[207] «¿Podría usted enunciar de nuevo el problema? ¿Podría usted enunciarlo de nuevo de otro modo?» (Pólya [1945], solapa). <<

[208] «Sustituir mentalmente las cosas definidas por sus definiciones» (Pascal [1659]). «Volver a las definiciones» (Pólya [1945], solapa y pág. 84). <<

[209] Esta prueba se debe a Poincaré (véase su [1899]). <<

[210] Véase Lhuilier [1812-13*a*]. La relación fue descubierta unas doce veces entre 1812 y 1890. <<

[211] Véase más arriba, págs. 81 y sigs. <<

[212] Véanse las págs. 146-148. <<

[213] Se trata de una cita de Ramsey [1931], pág. 56. Sólo se ha cambiado una palabra; él dice «lógicos matemáticos» en vez de «matemáticos», pero eso se debe tan sólo a que no entendía que el procedimiento que estaba describiendo no constituía una característica novedosa de la lógica matemática, sino un aspecto de las matemáticas «rigurosas» desde Cauchy, y que las célebres definiciones de limite, continuidad, etc., propuestas por Cauchy y mejoradas por Weierstrass están todas ellas en esta línea. Veo que también Russell cita esta frase de Ramsey (Russell [1959], pág. 125). <<

[214] Un ejemplo clásico de traducción que no satisfizo el criterio (usualmente implícito) de adecuación viene dado por la definición decimonónica del área de una superficie, que resultó eliminada por el «contraejemplo» de Schwartz.

El problema es que los criterios de adecuación pueden cambiar con el surgimiento de nuevos problemas capaces de provocar un cambio en el cajón de herramientas conceptual. Un caso paradigmático de ese cambio viene dado por la historia del concepto de integral. Es una vergüenza de la presente educación matemática que los estudiantes puedan citar exactamente las diferentes definiciones de las integrales de Cauchy, Riemann, Lebesgue, etc., sin conocer cuáles eran los problemas que trataban de resolver o cuáles eran los problemas en cuyo proceso de solución se descubrieron. A medida que cambian los criterios de educación, normalmente las definiciones se desarrollan de tal modo que la que satisface todos los criterios se torna dominante. Es algo que no podría ocurrirle a la definición de integral, debido a la inconsistencia de los criterios, y por eso el concepto hubo de dividirse. Las definiciones generadas por la prueba desempeñan una función decisiva, incluso en la construcción de definiciones traductoras, en el programa euclídeo. <<

[215] Este proceso es muy característico del formalismo del siglo veinte. <<

[216] Es bastante curioso que este punto se les haya escapado a nominalistas como Pascal y Popper. Escribe Pascal *(loc. cit.):* «… los geómetras y todos aquellos que operan metódicamente imponen nombres a las cosas con el único fin de abreviar el discurso». Por su parte, Popper escribe ([1945], volumen 2, pág. 14): «En la ciencia moderna sólo aparecen definiciones nominalistas, es decir, se introducen símbolos taquigráficos o etiquetas para abreviar una larga historia». Es curioso de qué modo los nominalistas y esencialistas pueden permanecer ciegos al meollo racional de los argumentos de los otros. <<

[217] Véase más arriba, pág. 143. <<

[218] La importancia metodológica de esta diferencia aún no se ha elaborado adecuadamente. Pascal, el gran defensor de las definiciones abreviadoras y el gran rival de la teoría esencialista de la definición de Aristóteles, no se percató de que abandonar el esencialismo era de hecho un abandono del programa euclídeo global. En el programa euclídeo hay que definir tan sólo aquellos términos que resultan «un poco oscuros». Si eso consiste tan sólo en sustituir un término vago por otro preciso, arbitrariamente elegido, se está abandonando en la práctica el campo de estudio original para entregarse a otro. Pero, sin duda no era eso lo que Pascal quería. Cauchy y Weierstrass eran esencialistas cuando desarrollaban la aritmetización de las matemáticas. Russell lo era también al llevar a cabo la logización de las matemáticas. Todos ellos pensaban que sus definiciones de continuidad, números reales, enteros, etc., captaban la esencia de los conceptos implicados. Al enunciar la forma lógica de los enunciados del lenguaje ordinario, es decir, al traducir el lenguaje ordinario al lenguaje artificial, Russell pensaba, al menos durante su «luna de miel» ([1959], pág. 73), que estaba guiado por una intuición infalible. En su injustificado asalto a las definiciones esencialistas, Popper no presta suficiente atención al importante problema de las definiciones traductoras, lo que creo que puede explicar lo que considero su tratamiento insatisfactorio de la forma lógica, en su [1947], pág. 273. Según él (y aquí sigue a Tarski), la definición de inferencia válida descansa *tan sólo* sobre la lista de signos formativos. *Pero, la validez de una inferencia intuitiva depende también de la traducción de la inferencia del lenguaje ordinario (o aritmético, geométrico, etc.) al lógico: depende de la traducción que adoptemos.* <<

[219] Tales cambios en la teoría dominante entrañan la reorganización de todo nuestro conocimiento. En la antigüedad, el carácter paradójico y la aparente inconsistencia de la aritmética indujo a los griegos a abandonarla como teoría dominante para sustituirla por la geometría. Su teoría de las proporciones servía para traducir la aritmética a la geometría. Estaban convencidos de que toda la astronomía y toda la física podían traducirse a la geometría.

La gran innovación de Descartes consistió en sustituir la geometría por el álgebra; tal vez porque pensaba que en la teoría dominante el propio análisis llevaría a la verdad.

La moderna «revolución del rigor» en matemáticas consistió de hecho en la restauración de la aritmética como teoría dominante, a través del vasto programa de aritmetización de las matemáticas que se produjo desde Cauchy a Weierstrass. El paso crucial fue la teoría de los números reales que unos cuantos matemáticos profesionales consideraban artificial, de modo semejante a la teoría «artificial» de las proporciones de los griegos.

A su vez, Russell hizo de la lógica la teoría dominante de todas las matemáticas. La interpretación de la historia de las matemáticas como una búsqueda de una teoría dominante puede arrojar nueva luz sobre la historia de este campo, y tal vez se pueda mostrar que el «descubrimiento» gödeliano de que la aritmética es la teoría dominante natural de las matemáticas ha llevado directamente a la actual etapa de investigación y ha abierto nuevas perspectivas tanto en la aritmética como en la metamatemática.

La moderna inclusión de la teoría de las probabilidades en la teoría de la medida constituye otro ejemplo de una notable traducción euclídea.

Las teorías dominantes y su cambio también determinan gran parte del desarrollo de la ciencia en general. La elaboración y hundimiento de la mecánica racional como teoría dominante en la física desempeñó una función central en la moderna historia de la ciencia. La lucha de la biología contra su «traducción» a la química y la lucha de la psicología contra su traducción a la

fisiología constituyen interesantes aspectos de la historia reciente de la ciencia. Los procedimientos de traducción son vastos depósitos de problemas, tendencias históricas que representan inmensos patrones de pensamiento, tan importantes al menos como la tríada hegeliana. Normalmente, tales traducciones aceleran el desarrollo tanto de la teoría dominante como de la absorbida, aunque más adelante la traducción se tornará en un impedimento de ulteriores desarrollos, a medida que los puntos débiles de la traducción pasen a primer plano. <<

[220] Como ya he señalado, el patrón histórico real puede desviarse ligeramente de este patrón heurístico. Asimismo, el cuarto estadio puede a veces preceder al tercero (incluso en el orden heurístico): un análisis de la prueba ingenioso puede sugerir el contraejemplo. <<

[221] <u>*Nota de los Editores*</u>: En otras palabras, este método consta, en parte, de una serie de enunciados $P_1\ldots, P_n$, tal que P_1 &… & P_n se supone que es verdadero de algún dominio de objetos interesantes y parece implicar la primitiva conjetura *C*. Puede resultar que no sea así; en otras palabras, hallamos casos en que *C* es falsa («contraejemplos globales»), aunque se sostienen desde P_1 hasta P_n. Eso lleva a la articulación de un nuevo lema, P_{n+1}, que también se refuta con el contraejemplo («contraejemplo local»). Así, la prueba original se sustituye por otra nueva que se puede resumir con el enunciado condicional

$$P_1 \ \&\ldots \ \& \ P_n \ \& \ P_{n+1} \rightarrow C.$$

La verdad (lógica) de este enunciado condicional ya no queda impugnada por el contraejemplo (puesto que el antecedente es ahora falso y, por consiguiente, el enunciado condicional es verdadero). <<

[222] Whewell [1858], 1, pág. 152. En 1858, Whewell está atrasado diez años por lo menos. El principio surge del principio de continuidad de Leibniz ([1687], pág. 744). Boyer, en su [1939], pág. 256, cita una nueva enunciación característica del principio debida a Lhuilier [1786], pág. 167. <<

[223] Esta *Mémoire* recibió el *grand prix de mathématiques* del año 1812, de cuyo tribunal formaban parte Laplace, Legendre y Lagrange. No se publicó hasta después del libro clásico de Fourier, *Théorie de la Chaleur*, que apareció en 1822, un año después del libro de texto de Cauchy, aunque el contenido de la *Mémoire* ya era entonces de sobra conocido. <<

[224] Fourier, *op. cit.*, secciones 177 y 178. <<

[225] Después de haber escrito esto, he descubierto que el término «discontinuo» aparece aproximadamente en el sentido de Cauchy en algunos manuscritos hasta ahora no publicados de Poinsot [1807] y de Fourier [1809], que fueron estudiados por el Dr. J. Ravetz, quien me ha permitido amablemente ver sus fotocopias. Sin duda eso complica mi caso, aunque no lo refuta. Es obvio que Fourier tenía dos nociones de continuidad diferentes en momentos distintos y, ciertamente, esas dos nociones diferentes surgen con toda naturalidad de dos dominios distintos. Si interpretamos una función como:

$$\text{sen } x - (1/2) \text{ sen } 2x + (1/3) \text{ sen } 3x - \ldots$$

como la posición inicial de una cuerda, se considerará ciertamente como continua, pareciendo antinatural cortar las líneas perpendiculares, como iba a exigir la definición de Cauchy. Pero si interpretamos esta función como, digamos, una función que representa la temperatura a lo largo de un alambre, la función parecerá obviamente discontinua. Estas consideraciones sugieren dos conjeturas. En primer lugar, la célebre definición de continuidad de Cauchy, que va en contra de la «interpretación de la cuerda» de una función, puede haber sido estimulada por la investigación de Fourier de los fenómenos del calor. En segundo lugar, la insistencia de Fourier en las perpendiculares de los gráficos de estas funciones discontinuas (según la «interpretación del calor»), puede haber surgido de un esfuerzo por no entrar en conflicto con el principio de Leibniz. *Nota de los editores:* Para más información sobre las matemáticas de Fourier, véase I. Grattan-Guinness (en colaboración con J. R. Ravetz), *Joseph Fourier*, *1768-1830* (M.I.T. Press, 1972). <<

[226] Se trata del sentido común de la cuerda o del gráfico. <<

[227] *Nota de los Editores:* Lo que aquí se viola no es tal vez nuestra noción intuitiva de continuidad, sino más bien nuestra creencia en que cualquier gráfico que represente una función habría de seguir representando alguna función cuando se rote ligeramente. La curva de Fourier es continua desde un punto de vista intuitivo y esta intuición se puede seguir explicando por la definición ε, δ de continuidad (que se atribuye usualmente a Cauchy); en efecto, la curva de Fourier, completada con las perpendiculares, es paramétricamente representable mediante dos funciones continuas. <<

[228] *Op. cit.*, sección 177. Esta observación, por supuesto, está muy lejos del descubrimiento de que la convergencia es infinitamente lenta en estos lugares, que no tuvo lugar hasta después de 40 años de experiencia en el cálculo de las series de Fourier. Además, ese descubrimiento no podría haberse realizado antes de la decisiva mejora que hizo Dirichlet de la conjetura de Fourier, mostrando que sólo se pueden representar por series de Fourier aquellas funciones cuyo valor en las discontinuidades es

$(1/2)[f(x + 0) + f(x - 0)]$. <<

[229] Abel [1826*b*], pág. 316. <<

[230] Cauchy [1826]. La prueba se basa en una suposición falsa incorregible (véase, por ejemplo, Riemann, [1868]). <<

[231] Moigno [1840-1]. <<

[232] Dirichlet [1829]. <<

[233] Seidel [1847]. <<

[234] Lo que le impidió a Cauchy hacer una clara evaluación crítica de su vieja prueba e incluso formular claramente su teorema en su [1853], págs. 454-9. <<

[235] Véase más arriba, págs. 41 -48. <<

[236] Abel [1826*b*], pág. 316. <<

[237] Abel no menciona que este ejemplo precisamente lo había ya utilizado Fourier en este contexto. <<

[238] Carta a Hansteen ([1826*a*]). El resto de la carta no deja de tener interés, reflejando el método de Abel de exclusión de excepciones: «Cuando se procede según un método general, no resulta demasiado difícil; pero he de proceder con gran circunspección, porque las proposiciones que he aceptado una vez sin prueba rigurosa (es decir, sin prueba ninguna) están tan enraizadas en mí, que corro continuamente el riesgo de utilizarlas sin más examen». Así, Abel comprobaba estas conjeturas generales una tras otra, tratando de averiguar su dominio de validez.

Esta restricción cartesiana autoimpuesta a la serie de potencias absolutamente clara explica el particular interés de Abel por el tratamiento riguroso del desarrollo de Taylor: «El teorema de Taylor, la base de todo el cálculo infinitesimal, no está mejor fundamentado. Sólo he hallado una demostración rigurosa, que es la de Cauchy en su *Résumé des leçons sur le calcul infinitesimal*, donde ha demostrado que tendremos

$$\phi(x+a) = \phi(x) + a\phi'(x) + \frac{a^2}{2}\phi''(x) + \cdots$$

siempre que la serie sea convergente; pero se emplea en todos los casos sin prestar atención». (Carta a Holmboë [1825].) <<

[239] Abel [1826*b*], 1, pág. 314. El texto está traducido del alemán. (Crelle tradujo el francés original al alemán.) *Nota de los Editores:* Parece que Abel se olvidó del signo de módulo para α. <<

[240] Pringsheim [1916], pág. 34. <<

[241] Hardy [1918], pág. 14H. <<

[242] Bourbaki [1949], pág. 65 y [1960], pág. 228. <<

[243] Cf. más arriba, págs. 41-48. <<

[244] Hubo dos matemáticos que se dieron cuenta de que la prueba de Abel no era completamente impecable. Uno de ellos fue el propio Abel, quien se enfrenta de nuevo al problema, aunque sin éxito, en su artículo publicado póstumamente, «Sur les Séries» ([1881], pág. 202). El otro fue Sylow, el coeditor de la segunda edición de las *Obras Completas* de Abel. Añadió una nota crítica al teorema, en la que señala que en la prueba se requiere una convergencia uniforme y no una simple convergencia, tal como hace Abel. Sin embargo, no utiliza el término de «convergencia uniforme», que parece ignorar (la segunda edición del *Cours d'Analyse* aún no había aparecido), refiriéndose en su lugar a una más reciente generalización de du Bois-Reymond, que lo único que demuestra es que ni siquiera él había visto con claridad la naturaleza del fallo de la prueba. Reiff, en su [1889], rechazó la crítica de Sylow con el argumento ingenuo de que el teorema de Abel es válido. Reiff dice que mientras que Cauchy fue el fundador de la teoría de la convergencia, Abel fue el fundador de la teoría de la continuidad de las series:

«Resumiendo brevemente los logros de Cauchy y de Abel, podemos decir: Cauchy descubrió la teoría de la convergencia y divergencia de las series infinitas en su *Analyse Algébrique* y Abel, la teoría de la continuidad de las series en su *Treatise on the Binomial Series*.» ([1889], págs. 178-9.)

Decir tal cosa en 1889 es con seguridad un caso de pomposa ignorancia. Pero, por supuesto, la validez del teorema de Abel se debe a las restringidísimas definiciones cero y no a la prueba. El artículo de Abel se publicó más tarde en *Ostwald's Klassiker* (N.° 71), Leipzig, 1895. En las notas, se reproducen los comentarios de Sylow sin comentario alguno. <<

[245] Jourdain [1912], 2, pág. 527. <<

[246] Los racionalistas dudan que pueda haber descubrimientos metodológicos. Piensan que el método es inalterable y eterno. Realmente, los descubridores metodológicos reciben muy mal trato. Antes de que se acepte su método, éste recibe el trato de una teoría excéntrica; después, el de un lugar común trivial. <<

[247] Seidel [1847], pág. 383. <<

[248] «Por lo que respecta a los métodos, he tratado de darles todo el rigor que se exige en geometría, de manera que no haya que recurrir a razones sacadas de la generalidad del álgebra.» (Cauchy [1821], Introducción.) <<

[249] Abel [1826*a*], pág. 263. <<

[250] «Introducir útiles restricciones en las afirmaciones demasiado extensas». (Cauchy, [1821].) <<

[251] Abel [1825], pág. 258. <<

[252] No cabe duda de que los contemporáneos consideraban que esta purga era «un poco brutal». (Cauchy, [1821], Introducción.) <<

[253] Abel [1825], pág. 257. <<

[254] El «formalismo» del dieciocho era puro inductivismo. En el prefacio de su [1821], Cauchy rechaza las inducciones que tan sólo son «apropiadas para presentar a veces la verdad». <<

[255] Abel [1826*a*], pág. 263. Para Cauchy y Abel, «riguroso» significa deductivo, en cuanto opuesto a inductivo. <<

[256] Cauchy [1821], Introducción. <<

[257] **Nota de tos Editores:* Nos parece que este pasaje está equivocado y no nos cabe duda de que Lakatos, que tenía en la mayor consideración la lógica formal deductiva, lo habría cambiado él mismo. La lógica de primer orden ha llegado a una caracterización de la validez de una inferencia que hace esencialmente infalible una inferencia válida (por respecto a la caracterización de los términos «lógicos» de un lenguaje). Así pues, sólo es necesario admitir la primera de las salidas mencionadas por Lakatos. Mediante un «análisis de la prueba» lo bastante bueno se pueden relegar todas las dudas a los *axiomas* (o antecedentes del teorema), sin dejar ninguna en la *prueba* misma. El método de pruebas y refutaciones no queda en absoluto invalidado (como se sugiere en el texto) si se rechaza la segunda salida: ciertamente, puede que sea con este método con el que se mejoren las pruebas, de modo que se expliciten todas las suposiciones necesarias, para que la prueba sea válida. <<

[258] En la misma década, la filosofía de Hegel ofrecía tanto una ruptura radical con sus predecesores infalibilistas como un poderoso punto de partida para un enfoque del conocimiento completamente nuevo. (Hegel y Popper representan las únicas tradiciones falibilistas de la filosofía moderna; pero, aun así, ambos cometen el error de conceder a las matemáticas una privilegiada condición de infalibilidad.) Un pasaje de de Morgan muestra el nuevo espíritu falibilista de los años cuarenta:

«Algunas veces aparece una predisposición hacia el rechazo de todo lo que ofrezca alguna dificultad o de todo aquello que no suministre todas sus conclusiones, sin molestarse en examinar las contradicciones aparentes. Si con ello se quisiese dar a entender que nada se debiera usar permanentemente ni se debiera confiar implícitamente en ello, si no resulta ser verdadero en la plena extensión de lo afirmado, entonces, por mi parte, no me opondría a un proceder tan racional. Mas, si lo que con ello se quiere dar a entender es que no se le debiera ofrecer al estudiante (llamándole o no la atención sobre el caso) nada que no se pueda comprender en toda su generalidad, yo, con toda deferencia, protestaría contra una restricción que en mi opinión tendería no sólo a dar una idea falsa de lo que de hecho se conoce, sino también a detener el progreso del descubrimiento. Fuera de la Geometría, no es cierto que las matemáticas sean, *en todas sus partes,* esos modelos de acabada precisión que muchos suponen. Los límites externos del *análisis* han sido siempre tan imperfectamente comprendidos como absolutamente desconocidas han sido las pistas de más allá de esos límites. Pero, el modo de ampliar el país establecido no ha consistido en mantenerse en su interior [esta consideración va en contra del método de exclusión de excepciones], sino en realizar expediciones de descubrimiento, y estoy plenamente convencido de que el *estudiante* debiera ejercitarse en ello; es decir, se le debería enseñar a examinar la frontera así como a cultivar el interior. Por tanto, no he tenido ningún escrúpulo, en la última parte de la obra, en utilizar métodos que no llamaré dudosos porque se presenten como inacabados ni porque las dudas sean las de un alumno expectante y no las de un crítico insatisfecho. A

menudo, la experiencia nos ha mostrado que la conclusión deficiente se ha vuelto inteligible y rigurosa, preservando el pensamiento; mas, ¿quién podrá hacer tal cosa con las conclusiones a las que nunca se les permite aparecer ante uno? El efecto de una atención exclusiva hacia aquellas partes de las matemáticas que no ofrecen oportunidad de discutir puntos dudosos es el desagrado ante modos o procedimientos absolutamente necesarios para la extensión del análisis. Si el cultivo de las partes superiores de las matemáticas se reservase a personas entrenadas para ello, podría haber algún atisbo de razón en mantener fuera del alcance del estudiante ordinario, no sólo las partes de las ciencias abstractas aún no establecidas, sino también las partes puramente especulativas, reservándolas para aquellos cuya misión sería hacer claras las primeras y aplicables las últimas. Sin embargo, tal como están las cosas, los pocos que en este país prestan atención a cualquier dificultad de las matemáticas por si mismas, llegan a dedicarse a ello por accidente, sea el gusto o las circunstancias. Debería aumentarse el número de tales accidentes permitiendo que aquellos estudiantes, cuya capacidad les permita leer las ramas superiores de las matemáticas aplicadas, tengan una oportunidad de ser conducidos al cultivo de esas partes del análisis de las que depende no tanto el uso actual, cuanto el proceso futuro de las ciencias de la materia» (de Morgan [1842], pág. vii). <<

[259] Según R. B. Braithwaite, «Euclides, el buen genio de las matemáticas y de la ciencia inconsciente de sí misma, ha sido el genio maligno de la filosofía de la ciencia y, ciertamente, de la metafísica». (Braithwaite [1935], pág. 353.) Con todo, esta afirmación tiene su origen en una concepción logicista y estática de las matemáticas. <<

[260] Algunos libros de texto pretenden que no esperan que el lector posea ningún conocimiento previo, sino tan sólo cierta madurez matemática. Lo que eso significa frecuentemente es que esperan que el lector esté dotado por naturaleza de la «habilidad» de aceptar los argumentos euclídeos sin ningún interés antinatural en el trasfondo problemático y en la heurística que está tras el argumento. <<

[261] Aún no se ha constatado suficientemente que la educación matemática y científica actual es un semillero de autoritarismo, siendo el peor enemigo del pensamiento crítico e independiente. Mientras que en matemáticas este autoritarismo sigue el patrón *deductivista* que se acaba de describir, en la ciencia opera mediante el patrón *inductivista.*

En la ciencia, existe una larga tradición inductivista. Un artículo ideal escrito en ese estilo comienza con una concienzuda descripción del aparato experimental, seguida de la descripción del experimento y su resultado. El artículo puede terminar con una «generalización». La situación problemática, la conjetura que el experimento ha de contrastar, permanece oculta. El autor alardea de una mente vacía y virgen. El artículo lo entenderán tan sólo aquellos pocos que conocen de hecho la situación problemática. El estilo inductivista refleja la pretensión según la cual el científico comienza con la mente vacía, cuando en realidad empieza con ella llena de ideas. Este juego sólo lo pueden jugar, y no siempre con éxito, un selecto gremio de expertos y sólo ellos pueden seguirlo. Como su gemelo (que no contrapartida) deductivista, el estilo inductivista, pretendiendo ser objetivo, alimenta de hecho un lenguaje gremial, atomiza la ciencia, ahoga la crítica y hace que la ciencia sea autoritaria. En tal presentación, nunca pueden aparecer contraejemplos: se parte de observaciones (no de una teoría) y, como es obvio, a menos que se tenga una teoría previa, no se pueden observar contraejemplos. <<

[262] Estas personas pretenden que los matemáticos parten con la mente vacía, establecen axiomas y definiciones a su antojo en el curso de una actividad juguetona, libre y creativa y sólo en un estadio posterior deducen los teoremas de esos axiomas y definiciones. Si los axiomas son verdaderos para alguna interpretación, los teoremas también lo serán. La correa de transmisión de la verdad matemática no puede fallar. Tras nuestro ejemplo del procedimiento de prueba, eso es algo que se puede eliminar como argumento en defensa del estilo deductivista en general, si no aceptamos restringir las matemáticas a sistemas formales.

Ahora bien, mientras que Popper mostró que quienes pretenden que la inducción es la lógica del descubrimiento científico están en un error, estos ensayos pretenden mostrar que quienes pretenden que la deducción es la lógica del descubrimiento matemático están también en un error. Mientras que Popper ha criticado el estilo inductivista, estos ensayos intentan criticar el estilo deductivista. <<

[263] Esta doctrina forma parte esencial de la mayoría de las diversas filosofías de las matemáticas. Cuando hablan del descubrimiento, los formalistas distinguen el *contexto del descubrimiento* y el *contexto de justificación.* «El contexto de descubrimiento se deja al análisis psicológico, mientras que la lógica se ocupa del contexto de justificación». (Reichenbach [1947], pág. 2.) Un punto de vista similar puede encontrarse en R. B. Brathwaite [1935], pág. 27 e incluso en Popper [1959], págs. 31-2, así como en su [1935]. Cuando (en 1934, de hecho) Popper dividía los aspectos del descubrimiento en psicología y lógica, de tal modo que no quedase lugar para la heurística como campo de investigación independiente, es obvio que aún no se había dado cuenta de que su «lógica del descubrimiento» era algo más que el mero patrón *estrictamente lógico* del progreso de la ciencia. Esta es la fuente del carácter paradójico del título de su libro, cuya tesis parece tener dos caras: *(a)* no hay una lógica del descubrimiento científico, tanto Bacon como Descartes estaban equivocados, y *(b)* la lógica del descubrimiento científico es la lógica de conjeturas y refutaciones. La solución de esta paradoja está a la mano: *(a)* no hay lógica *infalibilista* del descubrimiento científico que conduzca infaliblemente a resultados, y *(b)* existe una lógica falibilista del descubrimiento que es la lógica del progreso científico. Mas Popper, que ha echado las bases de *esta* lógica del descubrimiento, no estaba interesado en la meta-pregunta de cuál era la naturaleza de esta investigación, por lo que no se dio cuenta de que no es ni la psicología ni la lógica, sino una disciplina independiente, la lógica del descubrimiento, la heurística. <<

[264] Si bien hay que admitir que serían también muchos menos, puesto que la enunciación de la situación problemática mostraría de un modo demasiado obvio la inanidad de bastantes de ellos. <<

[265] Por alguna razón, en ciertos libros de texto se señala la convergencia uniforme como tema de tratamiento excepcional (cuasi-heurístico). Así, por ejemplo, W. Rudin, en su [1953], introduce primero una sección: «Discusión del Problema Principal» (pág. 115), en la que expone la conjetura primitiva y su refutación, y sólo después introduce la definición de convergencia uniforme. Esta presentación tiene dos puntos débiles: (*a*) Rudin no presenta sólo la primitiva conjetura y su refutación, sino que pregunta más bien si la primera conjetura es verdadera o falsa, mostrando su falsedad con ejemplos de sobra conocidos. Pero, al hacer eso, no supera el estilo infalibilista; en su «situación problemática» no hay conjetura, sino más bien una pregunta tajante y sofisticada, seguida por un ejemplo (no un contraejemplo) que suministra la respuesta sin el menor titubeo. (*b*) Rudin no muestra que el concepto de convergencia uniforme surja de la prueba, sino que más bien, según su presentación, la definición precede a la prueba. No podría ser de otro modo en el estilo deductivista, ya que, si hubiese dado primero la prueba original y sólo después la refutación seguida de la prueba mejorada y de la definición generada por la prueba, habría mostrado el movimiento de las matemáticas «eternamente estáticas», la falibilidad de las matemáticas «infalibles», cosa inconsistente con la tradición euclídea. (Tal vez debería añadir que cito el libro de Rudin porque es uno de los mejores libros de texto de esta tradición.) En el prefacio, por ejemplo, dice Rudin: «Parece importante, especialmente para el principiante, ver explícitamente que las hipótesis de un teorema son realmente necesarias para asegurar la validez de las conclusiones. A este fin, se ha incluido en el texto un buen número de contraejemplos». Desgraciadamente, se trata de contraejemplos inventados, ya que de hecho son ejemplos de lo listos que son los matemáticos al incluir en el teorema todas las hipótesis. Mas no dice de dónde vienen esas hipótesis; no dice que vienen de las ideas de prueba y que el teorema no surge de la cabeza del matemático al modo en que Palas Atenea salió totalmente armada de la cabeza de Zeus. Este uso de la palabra «contraejemplo» no debiera engañarnos, haciéndonos esperar un estilo falibilista. *Nota de los Editores:*

Todas las consideraciones de Lakatos acerca de la obra de Rudin se basan en la *primera edición* del libro. No todos los pasajes que cita Lakatos se hallan en la segunda edición, aparecida en 1964. <<

[266] Esta idea hegeliana de la autonomía de la actividad humana alienada puede darnos la pista de algunos problemas relativos al estatuto y metodología de las ciencias sociales, especialmente la economía. Mi concepción del matemático como personificación imperfecta de las Matemáticas es muy similar a la idea de Marx del capitalista como personificación del Capital. Desgraciadamente, Marx no cualificó su concepción, subrayando el carácter imperfecto de esa personificación y el hecho de que no hay nada inexorable en la realización de ese proceso. Por el contrario, la actividad humana siempre puede suprimir o distorsionar la autonomía de los procesos alienados, dando lugar a otros nuevos. El olvido de esta interacción fue una debilidad central de la dialéctica marxista. <<

[267] *Nota de los Editores:* Estamos seguros de que Lakatos habría modificado este pasaje en algunos aspectos, pues la garra de su trasfondo hegeliano se fue haciendo más y más débil a medida que progresaba su trabajo. Con todo, mantuvo la creencia en la importancia central de reconocer la autonomía parcial de los productos de la empresa intelectual humana. En este mundo del contenido objetivo de las proposiciones (Popper dio en llamarlo el «tercer mundo»; véase su [1972]), los problemas existen (causados, por ejemplo, por las inconsistencias lógicas entre proposiciones) independientemente de que los reconozcamos; por tanto, podemos *descubrir* (más bien que inventar) problemas intelectuales. Pero, Lakatos llegó a creer que esos problemas no «exigían» una solución ni dictaban su propia solución; por el contrario, para su solución se precisa del ingenio humano (que puede tener éxito o no tenerlo). Este punto de vista está presagiado en la crítica a Marx de la nota anterior. <<

[268] Rudin [1953], págs. 99-100. <<

[269] Ibid., pág. 106. <<

[270] Rudin [1953], Prefacio. <<

[271] La prueba y el teorema que la resume se mencionan de hecho en el libro de Rudin, aunque se ocultan en el ejercicio 17 del capítulo 8 (pág. 164), estando totalmente desconectados de los dos conceptos anteriores que se introducen de un modo autoritario. <<

[272] Fourier [1808], pág. 112. <<

[273] «Desarrollable en series de Fourier» quiere decir «desarrollable en una serie trigonométrica con los coeficientes de Fourier». <<

[274] Véase su [1829] y [1837]. Hay muchos aspectos interesantes del trasfondo de esta prueba en los que desgraciadamente no podemos entrar; por ejemplo, el problema del valor de la «prueba» original de Fourier, la comparación de las dos pruebas subsiguientes de Dirichlet y la aplastante crítica que hace Dirichlet de la anterior prueba de Cauchy [1826]. <<

[275] Deberíamos mencionar aquí que la prueba de Dirichlet no se vio precedida o estimulada por contraejemplos de la conjetura original de Fourier (véase la nota [230] en el Apéndice 1; el dominio de validez de esta prueba era el conjunto vacío). Los primeros contraejemplos sólo fueron sugeridos por los lemas de la prueba de Dirichlet, especialmente por el primero. Aparte de esto, el primer contraejemplo de la conjetura de Fourier no lo presentó hasta 1876 du Bois-Reymond, quien halló una función continua que no era desarrollable en series de Fourier. (Du Bois-Reymond [1876].) <<

[276] ¡La «introducción» de un concepto a partir de la nada es una operación mágica a la que se recurre muy a menudo en la historia escrita al estilo deductivista! <<

[277] Véase Jordan [1881] y Jordan [1893], pág. 241. El propio Jordan subraya que él no modifica la *prueba* de Dirichlet, sino tan sólo su *teorema*. («… la demostración de Dirichlet resulta así aplicable sin modificación a toda función donde la oscilación se limita…») Con todo, Zygmund está equivocado cuando dice que el teorema de Jordan es «más general sólo en apariencia» que el de Dirichlet (Zygmund [1935], pág. 25). Eso es cierto aplicado a la prueba de Jordan, aunque no a su teorema. Pero, al mismo tiempo, es confundente decir que Jordan «extendió» el teorema de Dirichlet al dominio más general de las funciones de variación acotada. (V. g., Szökefalvi-Nagy [1954], pág. 272.) También Carslaw muestra una similar falta de comprensión del análisis de la prueba en su *Introducción Histórica* a su [1930]. No se da cuenta de que la prueba de Dirichlet es el antepasado del concepto generado por la prueba de variación acotada. <<

[278] Para la lista de los estadios normales del método de pruebas y refutaciones, cf. las págs. 149-150. <<

[279] Una vez más, du Bois-Reymond fue un precursor de este descubrimiento ([1879], [1885]); y una vez más también, fue el admirablemente agudo C. Jordan su descubridor (Jordan [1887], págs. 594-8 y [1893], págs. 100-8). <<

[280] Halmos [1950], pág. 44. <<

[281] K. Menger [1928], pág. 76, citado aprobatoriamente por K. R. Popper en su [1959], pág. 55. <<

[282] Halmos [1950], pág. 44. <<

[283] Ibid. <<

[284] Loeve [1955], pág. 87. <<